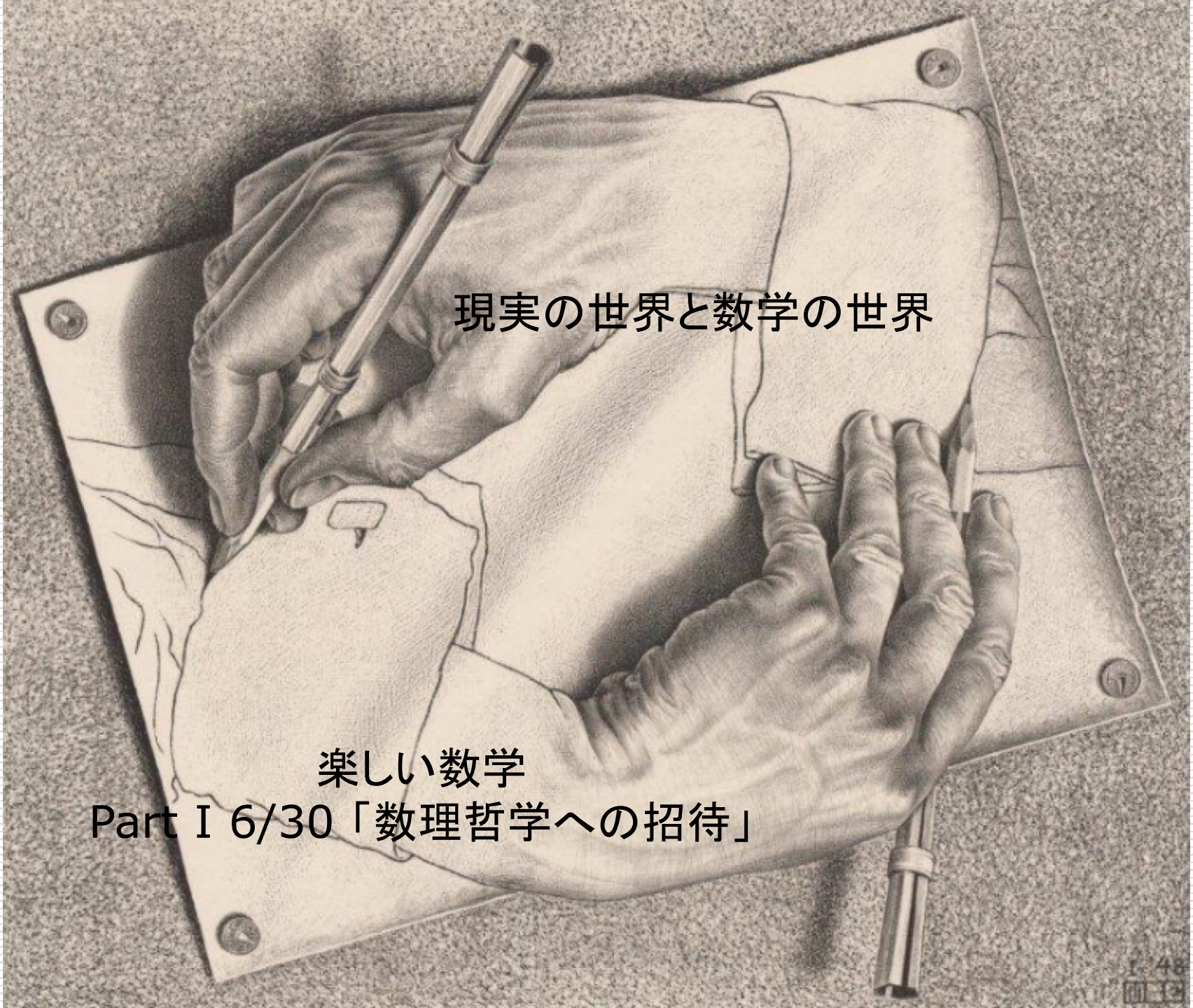


楽しい数学
Part Ⅰ 6/30「数理哲学への招待」

はじめに -- 数学との接点の広がり

- 現代の社会を物質的な側面で支えているのは、様々な産業技術である。技術の基礎には科学がある。ただ、科学と技術を、深いところで支えているのは数学であると僕は考えている。
- 社会が複雑になり、我々の社会的活動が多様になり、また、我々の認識の対象が量子の世界から宇宙まで拡大するにつれ、我々と数学との接点は、ますます広がっている。
- 社会的活動の大きな領域でIT技術が活躍する現代、ITと数学との接点が広がり深まるのも、不可避のことだ。事実、ディープラーニングや量子コンピュータなど、新しいIT技術を知ろうとすると、いろんな数学的知識が要求されることになる。
- IT技術者にとって、それはある意味自然なことだ。もともと数学の世界は、プログラミング＝アルゴリズムの世界に隣接して、そのちょっと先にひろがっているからである。

はじめに　－ 数学を楽しく学ぼう

- 連続セミナー「楽しい数学 － 数理ナイト」の目標は、数学にあまり縁がなかった人たちにも、タイトルどうりに、数学が面白いことを感じてもらうというものにしたいと思っている。
- 「楽しい数学 － 数理ナイト」シーズン1のテーマを、「数学の基礎について考える」としたのは、数学をすることと、数学について考えることとは、違うことだと考えて欲しかったからだ。
- 実は、あまり数式を使わなくても、数学について「考える」ことはできるのだ。特に、数学の理論がそれに基づいての構成されている数学の基礎的概念については、それが基礎的なものであればあるほど、計算することより、それについて「考える」ことが重要になると、僕は考えている。
- もちろん、数学について考えたからといって、それだけで数学ができるようになるわけではない。ただ、面白いと思うこと興味を持つことは、数学を学ぶ上でとても大事なことだ。

はじめに -- 数理哲学とは？

- 数理哲学は、数学の基礎や数学的な認識の特質を対象とする哲学の一分野である。そこでの大きな問題の一つは、数学の世界と現実の世界は、どのような関係を持つのかということである。プラトンの「観念実在論」や、カントの「先験的直観形式論」など、哲学史的にも様々な議論がある。
- 素朴には、現実とは無関係に構築されたように見える数学が、なぜに現実の問題解決に応用できるのかというのが、一つの問題の立て方である。筆者は、それらとは異なって、事後的に振り返れば、数学は自然認識を中心とする対象認識の拡大にともなって、その必要に応じて構成された体系だと考えている。
- もっとも、小論は、そうした論点にたち入ることを目的にしていない。小論は、ピタゴラスの定理が、リーマンとアインシュタインによって、どのように拡大されたかを追いかけて見たものだ。

はじめに　– 知能とシンボル操作の能力

- この時期に、こうしたテーマを取り上げたのは、もう一つ理由がある。それは、ディープラーニングを中心とした知能へのアプローチに物足りなさを感じたからだ。我々は、確かに知覚を通じて得たイメージから様々の「特徴」を抽出する。ただ、そこでは、知覚の直接的過程とその認識の過程は、一体のものだ。
- 我々の知能は、そうした直接的で単純な過程の総和でも、それに還元されるものでもないと僕は考えている。我々は、イメージをも、それをシンボルとして脳内で反省的に操作できる。そして、それを可能にしているのは、シンボルとしての言語を扱う能力である。それは、数学的能力の基礎をなす、知能の構成要素である。
- 本セミナーで、イメージを想起し操作する課題を置いたのは、実は、意味がある。この資料を読んだ人が、楽しい「思考実験」に参加してもらうことを期待している。

Agenda

第一夜 -- 数理哲学への招待

- 思考実験1:「正しい三角形はどこにあるか考えてみよう」
- 思考実験2:「どこまでも広がる水平面を考えてみよう」

- 古代の数学:ピタゴラスの定理
- ユークリッド:「幾何学原論」
- 「幾何学を知らざる者、この門入るべからず」
  プラトン:思惟の世界と実在の世界
- 「平行線は交わらない?」
  非ユークリッド幾何学の発見
- ミンコフスキーとアインシュタイン
- 曲がった時空とブラックホール

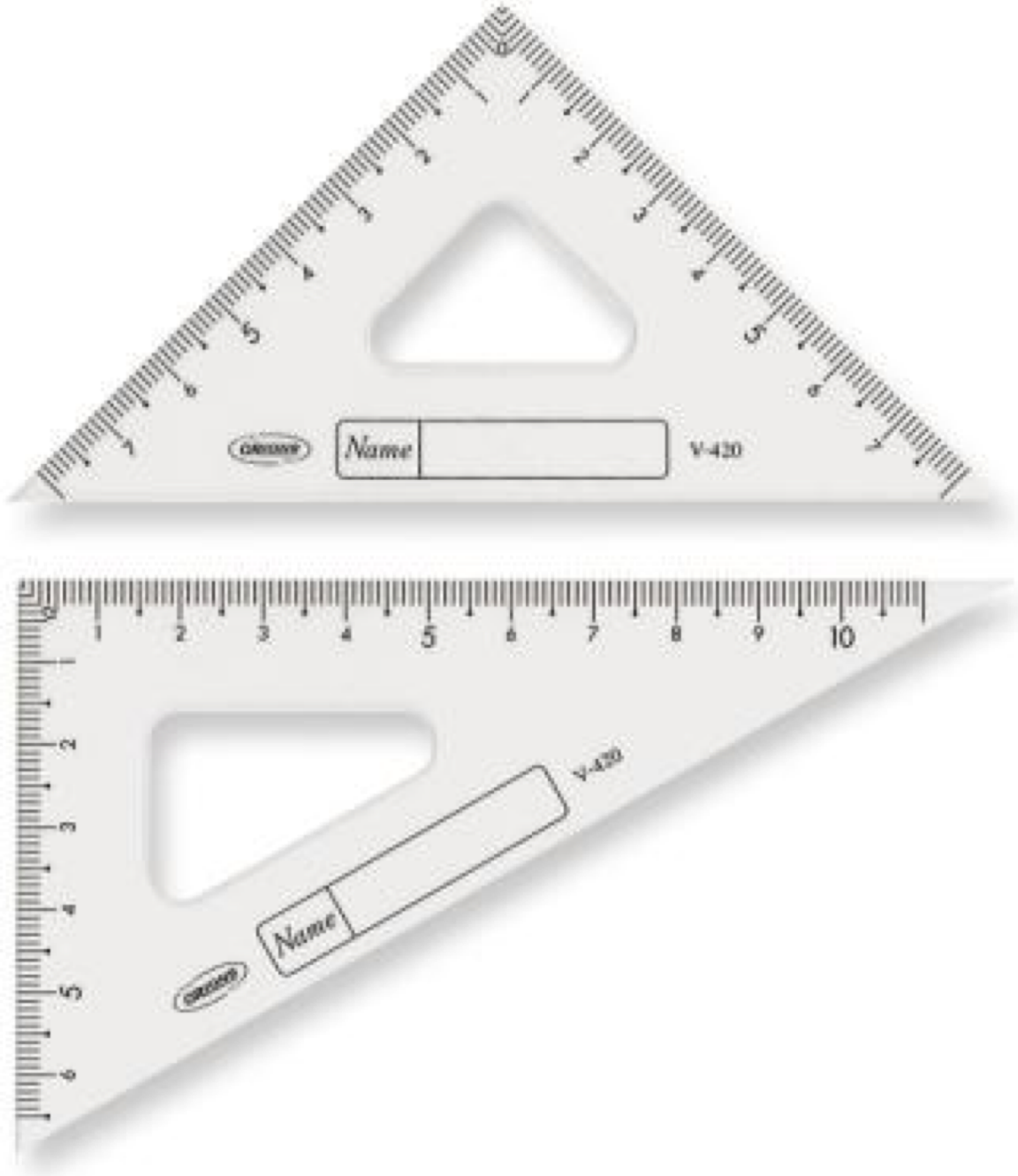
思考実験1：

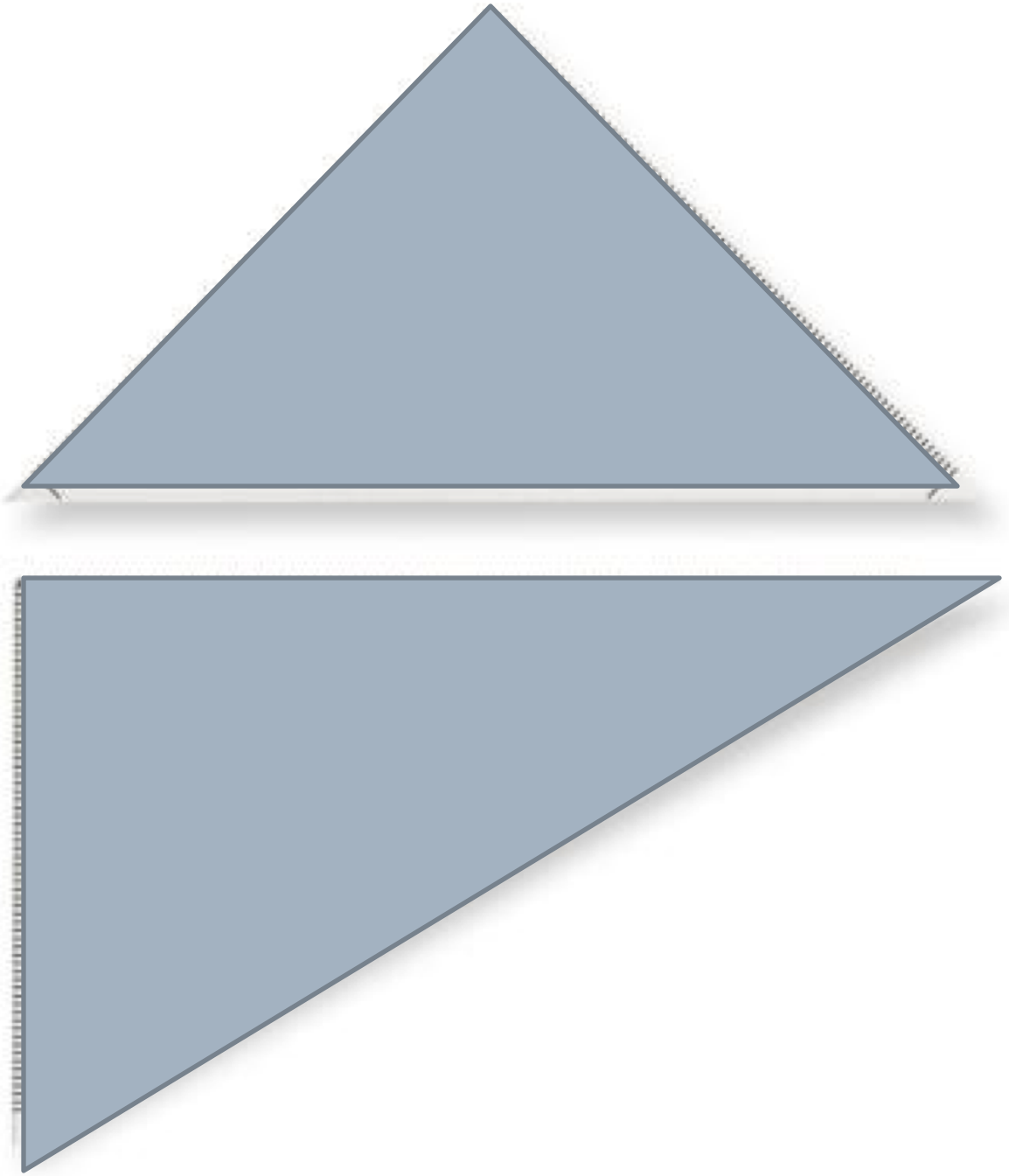
「正しい三角形はどこにあるか考えてみよう」

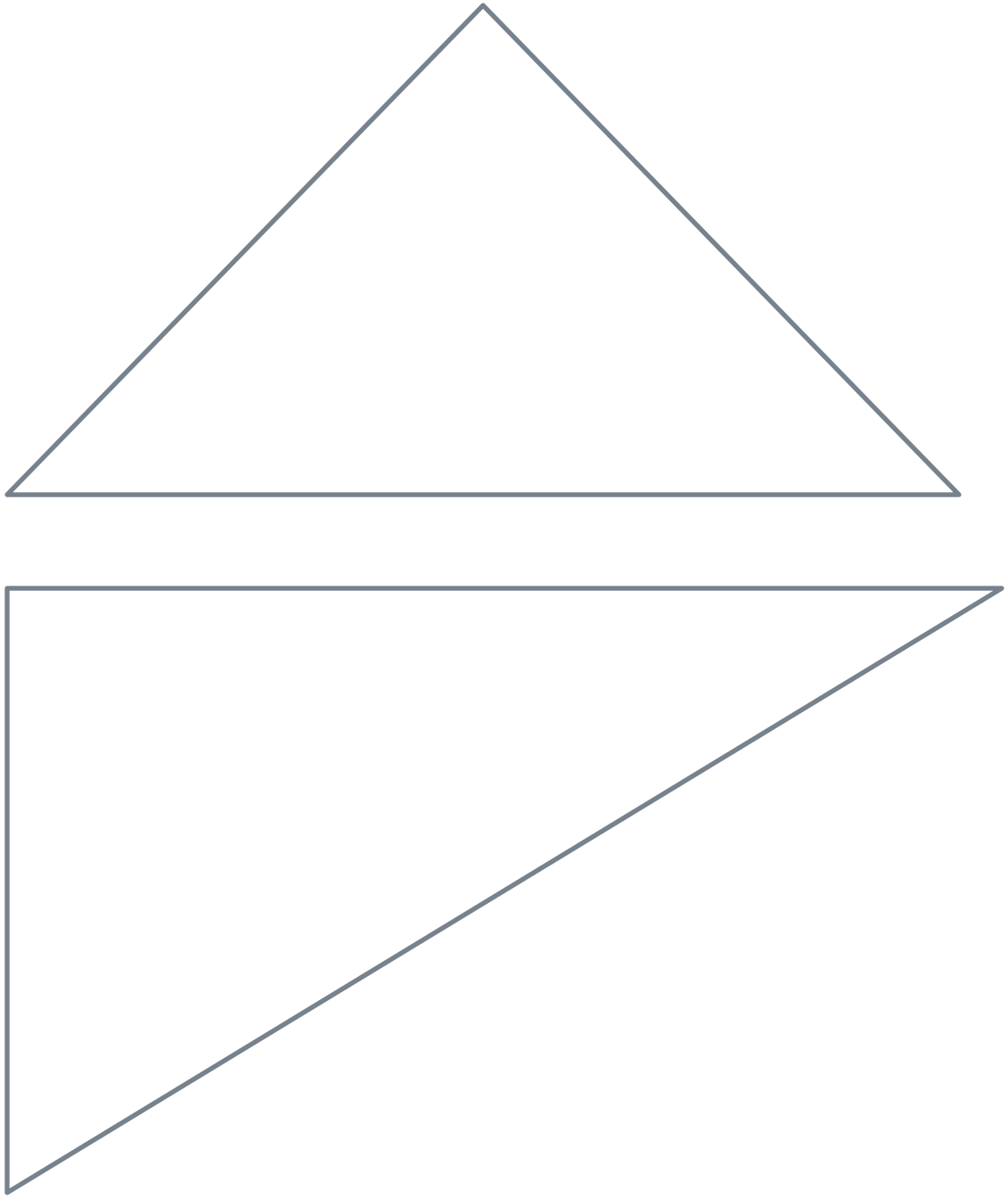





日本最北端の地
The Northernmost Point in Japan


Name
V-420
Name
V-420





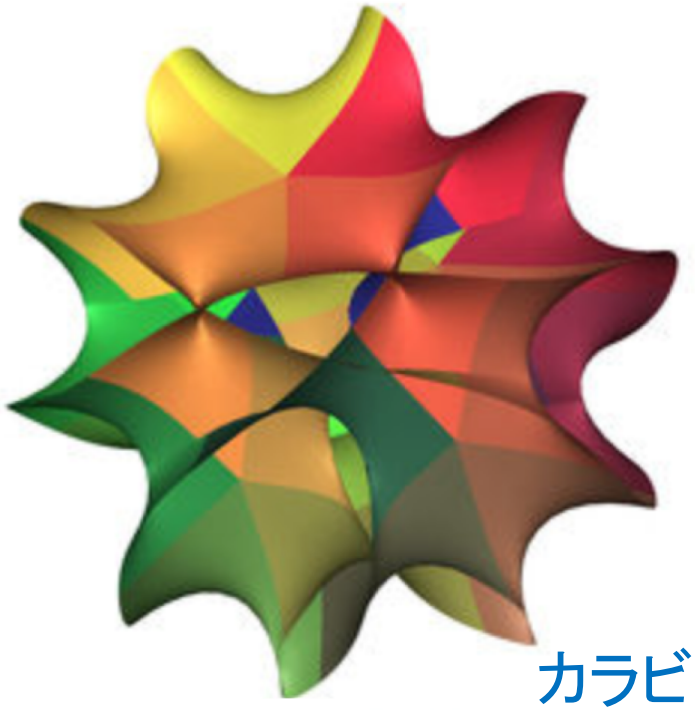
頭の中に三角形を描きなさい

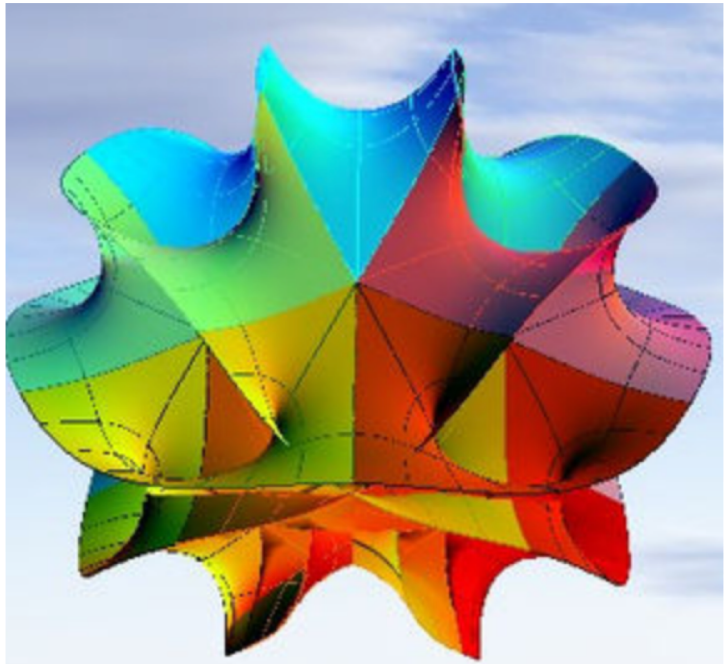
頭の中に三角形を描きなさい

「頭の中の三角形」と「実在する三角形」の
違いを考えなさい

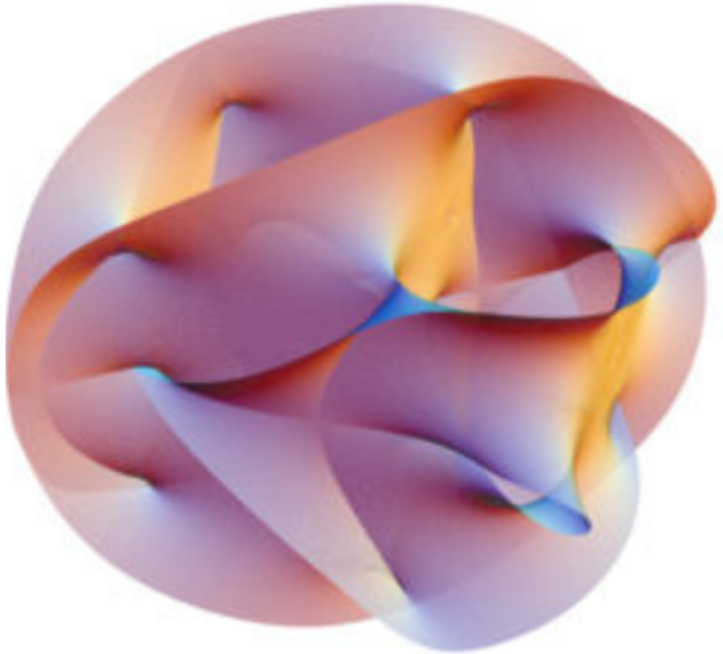
「頭の中の三角形」と「実在する三角形」の違いを考える

- 実在する三角形は、正確な三角形ではない。正しい三角形は、頭の中にしかない。これは、自明。
- 今、50人が頭の中に、三角形のイメージを持っているとする。目の前に実在する三角なものは、具体的にさし示すことが出来るが、頭の中の三角形は、そのようには指示できない。
- それでも、50人が、共通に三角形のイメージを持っていることができるとすれば、それは、一つには50人の認識能力が等しく、かつ、具体的には、「三角形」という言葉を50人が、共通に知っているからである。後者について言えば、例えば、「頭の中に三角形を描きなさい」というのと「頭の中にカラビ・ヤウ多様体を描きなさい」というのを比べてみればわかる。
- 言葉は、実在の三角形も、頭の中の三角形も、共通に指示することができる。



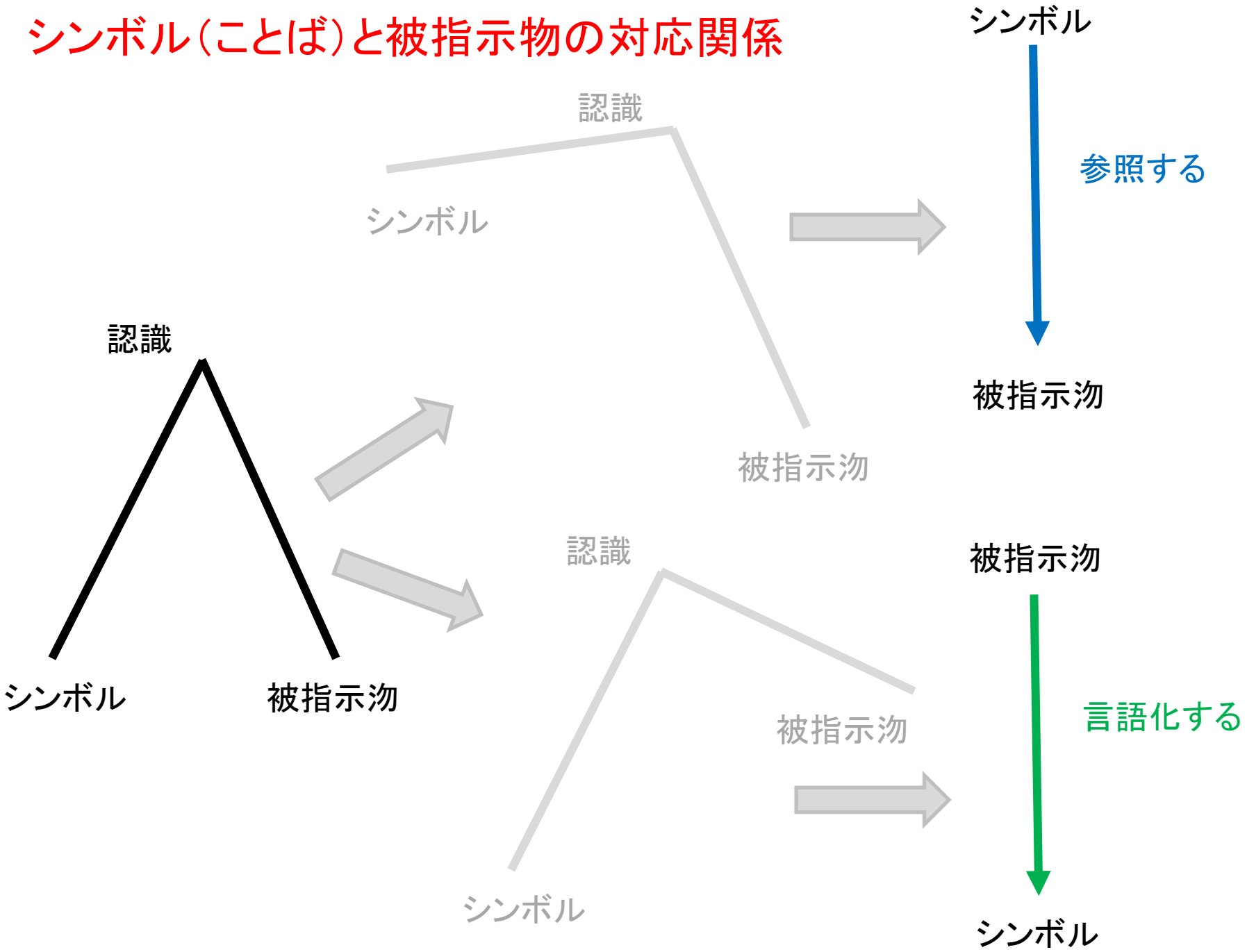


カラビ・ヤウ多様体





シンボル（ことば）と被指示物の対応関係



頭の中に三角形を描きなさい

頭の中に三角形を描きなさい

三角形を大きくしたり小さくしてみなさい

頭の中に三角形を描きなさい

三角形を大きくしたり小さくしてみなさい

頭の中の三角形の辺の「長さ」に
ついて考えなさい

「頭の中の三角形」の辺の「長さ」について考える

- 頭の中で、「大きな三角形」と「小さな三角形」のイメージを持つことができるように見える。ただ、それができるのは、二つの三角形を同時にイメージした時だけだ。
- 二つの三角形、あるいは二つの線分を、頭の中で移動して、ぴったり重ね合わすことができれば、二つの「大きさ」は、等しいと言えるかもしれない。ただ、我々は頭の中では、あるものを自由に移動できるだけでなく、同じものを、同じもののままで、自由に「大きさ」を変えることもできる。
- 一つの三角形のみをイメージした時、我々は、その「大きさ」について、語ることができない。頭の中の三角形の辺は、「長さ」という属性を持っていない。あるいは「測定不能」である。同様に、頭の中の図形の「面積」も「体積」も「測定不能」である。
- 当然、「重さ」も存在しない。もっと重要なことは、頭の中の図形の世界には、「時間」が流れていない。

頭の中に三角形を描きなさい

頭の中に三角形を描きなさい

三角形から、その辺を取り除いて、
残った三つの点について考えなさい

三角形から、その辺を取り除いて、残った三つの点について考える

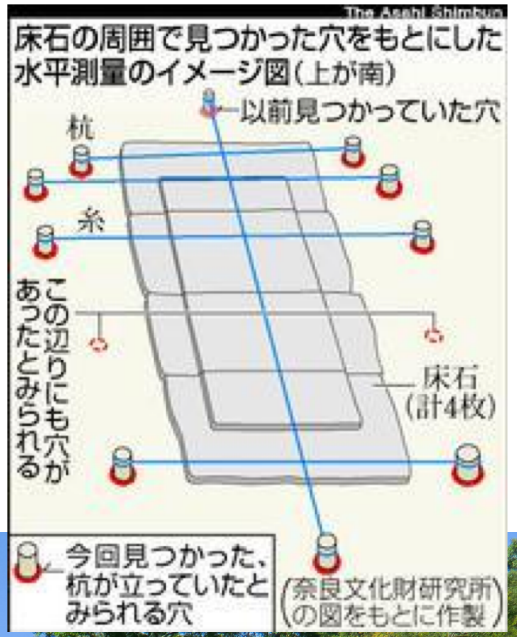
- 頭の中の三角形の辺は、測定可能な「長さ」を持たないことは。先に述べた。ところが、三角形から、その辺を取り除いて、残った三つの点について、我々は、その数を数えることができる。
- 頭の中のイメージの世界では、同じ「量的規定」でも、「辺の長さ」のような「連続量」を定義し測定することはできないのだが、「点の数」のような「離散量」については、数えることができる。
- 頭の中の点は、それは大きさを持たないものだとされていても、我々はその存在を、イメージできる。広がりを持つものについては、我々はその大きさ（面積）はイメージできないのだが、大きさの小ささの極限については、イメージできるということ。

思考実験2：

「どこまでも広がる水平面を考えてみよう」

高松塚古墳　藤原京期（694年～710年









『春日権現験記絵』での
「水平」の取り方
1309年

TAB. SURVEYING

Fig. 1 Chain

Fig. 2 Chain

Fig. 3 Chain

Fig. 4 Air Level

Fig. 5 Air Level

Fig. 6 Plumb Level

Fig. 7 Reflecting Level

Fig. 8 Gunners Level

Fig. 9 Levelling

Fig. 10 Levelling

Fig. 11 Levelling

Fig. 11 Compass

Fig. 12 Compass Surveying

Fig. 15 Compass

Fig. 16 Semi Circle

Fig. 17 Everards Sliding Rule

Fig. 18 Loggeshals Sliding Rule

Fig. 18 Four foot Gauging Rod

Fig. 19 Circumferentor

Fig. 20 Circumferentor Plain Table

Fig. 21 Circumferentor

Fig. 22 Foot Level

Fig. 23 Perambulator

Fig. 24 Croft

Fig. 25 Theodolite

Fig. 25 Theodolite

Fig. 26 Gauging

Fig. 27 Gauging

Fig. 29 Protractor

Fig. 30 Quadrant

Fig. 31 Plotting

Fig. 31 Plain Table

Fig. 32 Plotting Scale

Fig. 32 Plain Table

Fig. 33 Plain Table

Fig. 34 Plain Table

Fig. 35 Plain Table

Fig. 36 Plain Table













どこまでも広がる水平面を考えてみよう

どこまでも広がる水平面を考えてみよう

全く波の立っていない、鏡のような、広大な海面
を想像し、それを上空から眺めてみよう

全く波の立っていない、鏡のような、広大な海面を想像し、それを上空から眺めてみよう

- この水平が限りなく広いことを確認しようと、どんどん高度を上げていくと、奇妙なことがおきる。巨大な水平面は、さらに巨大な視点から見ると、巨大な水の球体を形成することに気づく。
- 巨大な水平面が、どうして球の一部になってしまうのか？　小さな範囲では、我々は水平と球面を混同することはない。
  しかし、地球上に存在する、水の表面の形成する水平面は、全部つなぎ合わせると、巨大な球を形成する。
- 我々が、水平面だと思ったものは、巨大な球面の一部に過ぎなかった。もっとずっと高度をあげよう。そうすれば、一目では見晴らしが利かなかった巨大な球面も、月のような球形の物体となり、さらには、望遠鏡で見る木星のように姿を変え、ついには、星のように全くの点として見えるようになる。

全く波の立っていない、鏡のような、広大な海面を想像し、それを上空から眺めてみよう

- 巨大な平面から巨大な球面へ、最後には、それらの違いも全て飲み込む単純な点へ。我々の、図形に対する直観は、そのスケールによって、形を変える。
- ギリシャの哲学者のプロタゴラスは、円がその接線と一点で交わるというユークリッドに対して、円をどんどん巨大なものにしていっても、やはり一点でしか交わらないのかと反論したという。
- 我々の例で言うと、巨大な球体とその巨大な接平面は、本当に一点でしか共通点を持たないのか？　このついには点になる巨大な球体とその接平面というメタファーは、長いこと、僕のお気に入りだった。

全く波の立っていない、鏡のような、広大な海面を想像し、それを上空から眺めてみよう

- 広い水平面はイメージできたけど、水平面 → 球面 → 点　というイメージが持てなかった人は、少し、練習すること。 逆に、水平面 → 球面 → 点というイメージはできたけど、広い水平のイメージが持てなかった人も、練習すること。
- 二つのイメージは、共存できない。同時には、どちらかのイメージしか持てない。ただ、頭を切り替えれば、両方のイメージを持つことはできるようになる。
- 次の思考実験では、点にならない、広大な水平面をイメージすることが前提となる。

どこまでも広がる水平面を考えてみよう

どこまでも広がる水平面を考えてみよう

目の前10mぐらいのところに、どこまでも広がる巨大な水平面が垂直に立っているのを観察せよ（君は、宇宙空間にいる）

どこまでも広がる水平面を考えてみよう

目の前10mぐらいのところに、どこまでも広がる巨大な水平面が垂直に立っているのを観察せよ（君は、宇宙空間にいる）

君は、海の中にからだを沈めて、目だけ出している。どこまでも広がる水平面を観察せよ

どこまでも広がる水平面を、視点を変えて観察する

- どこまでも広がる水平面を「壁」としてみるとき、我々は、それが、どこまでも広がっていることを確認できるか？
- 壁の下の方を60度の角度で見下ろしても、壁の上を80度の角度で見上げても、壁がどこまでも広がっていることは確認できない。下方61度、上方81度のところで、壁がなくなっているのかもしれないのだから。どこまでも壁が続いていることを確認するためには、真上あるいは真下を見るしかない。ただ、そのとき、壁は視界から消える。
- 水に身を沈める第二の方法は、この点では優れている。ただし、全体の広がりを見るためには、360度、からだを回転する必要がある。一瞥で広がりがわかるわけではないのだ。（最初の方法でも、それは同じだ。）
- 遠くのものは、イメージの世界でもぼんやりとしかイメージできない。イメージの世界は、小さいものが得意なのだ。

無限の大きさを持つ球体を考えてみよう

無限の大きさを持つ球体を考えてみよう

- これは、意外と難しい。僕は、うまくできなかった。視界（イメージの）に球が現れれば、その球は無限の大きさを持つとは言えない。先のイメージ実験のように、目の前に大きな壁を見たとしても、それは無限の水平面で、球である保証はない。
- 無限大の球体をイメージしろというのは、実は、宇宙の全体を宇宙の外からイメージしろという話とほとんど同じである。我々は、宇宙の外からでなく、宇宙の中から宇宙の大きさを考えるしかないのだ。

思考実験のまとめ

- 今回のは、「思考実験」というより、「イメージ実験」とでも呼ぶべきものだ。イメージは、けっして固定したものではなく、我々の経験や思い込みで、姿を変える。
- イメージ＝表象というのは、ある意味、直感的な明証性を持っているのだが、イメージの及ぶ範囲を、無理やり拡大しようとすると、いろいろ面白いことが起きる。特にイメージのの周縁に無理に関心を集中すると、イメージが破綻することがある。
- その明証性が有効なのは、「一目でわかる」ものだけなのかもしれない。ただし、イメージが持つ局所的な情報は、意外と豊かである。無限大の延長より、無限小への縮小の方が、有効であるように思う。

古代の数学：バビロニア

今から4000年近く前、ピタゴラスが生まれる1500年前、古代バビロニアでは、すでに「ピタゴラスの定理」を知っていた。近年（昨2017年）、そのことを裏付ける決定的な解読が行われた。

バビロニアの数学　粘土板 YBC 7289

バビロニアでは、2の平方根の値を知っていた。



その近似値は60進法で4桁、
10進法では約6桁に相当する。
対角線に刻まれた数字は、
1, 24, 51, 10。60進では、

$$1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3 = 1.41421296...$$

となる。

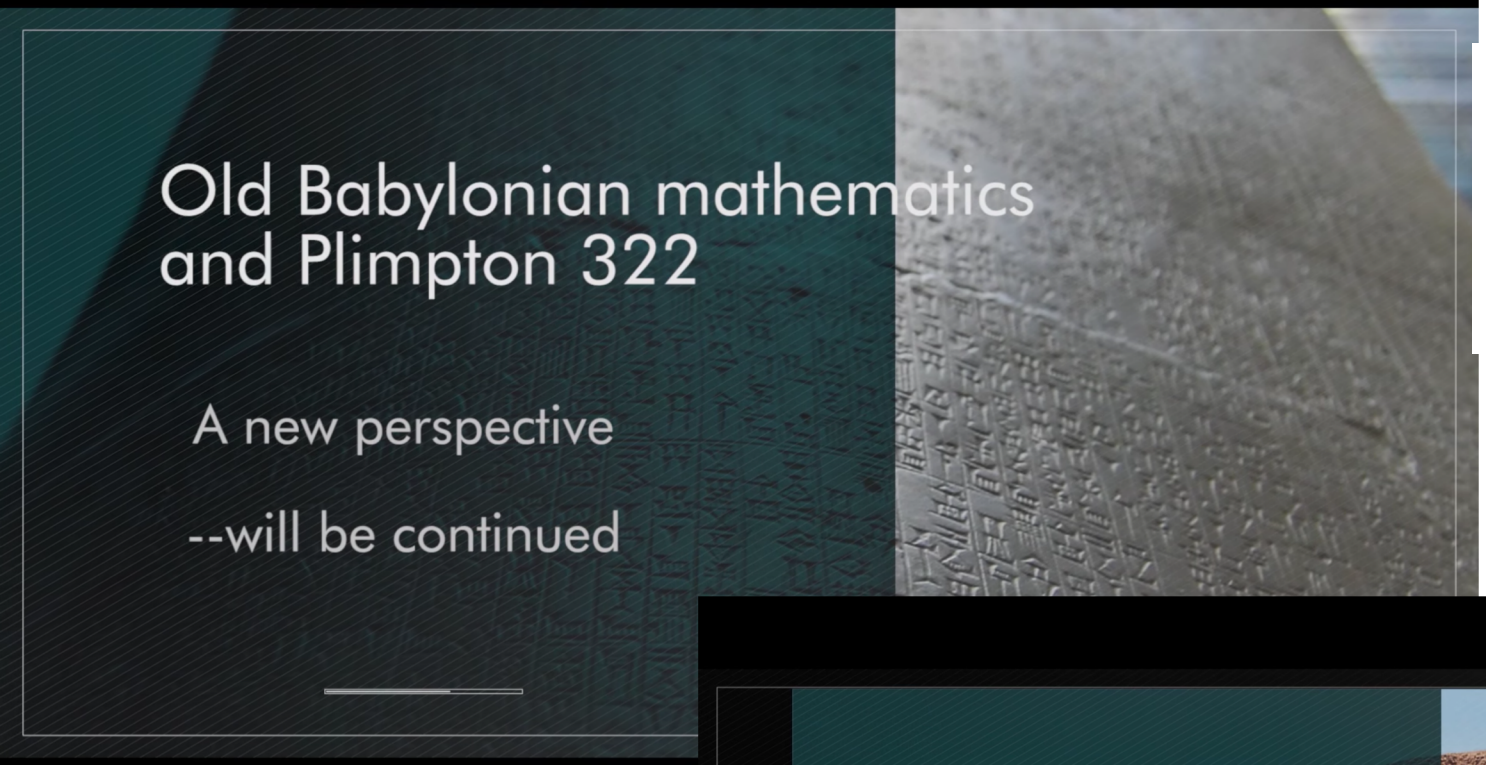
$$\sqrt{2} = 1.41421296...$$

バビロニアの数学　Plimpton 322

バビロニアでは、ピタゴラスの定理を知っていた。



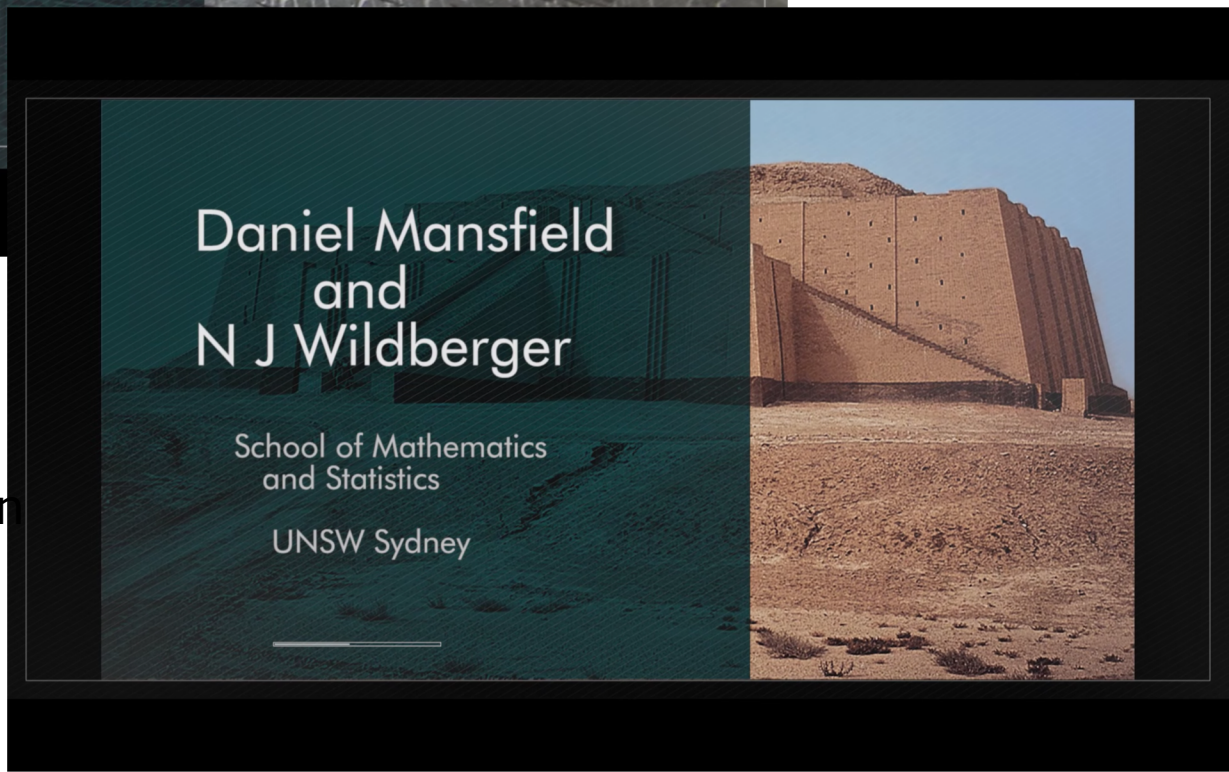
1822 BC ~ 1762 BC

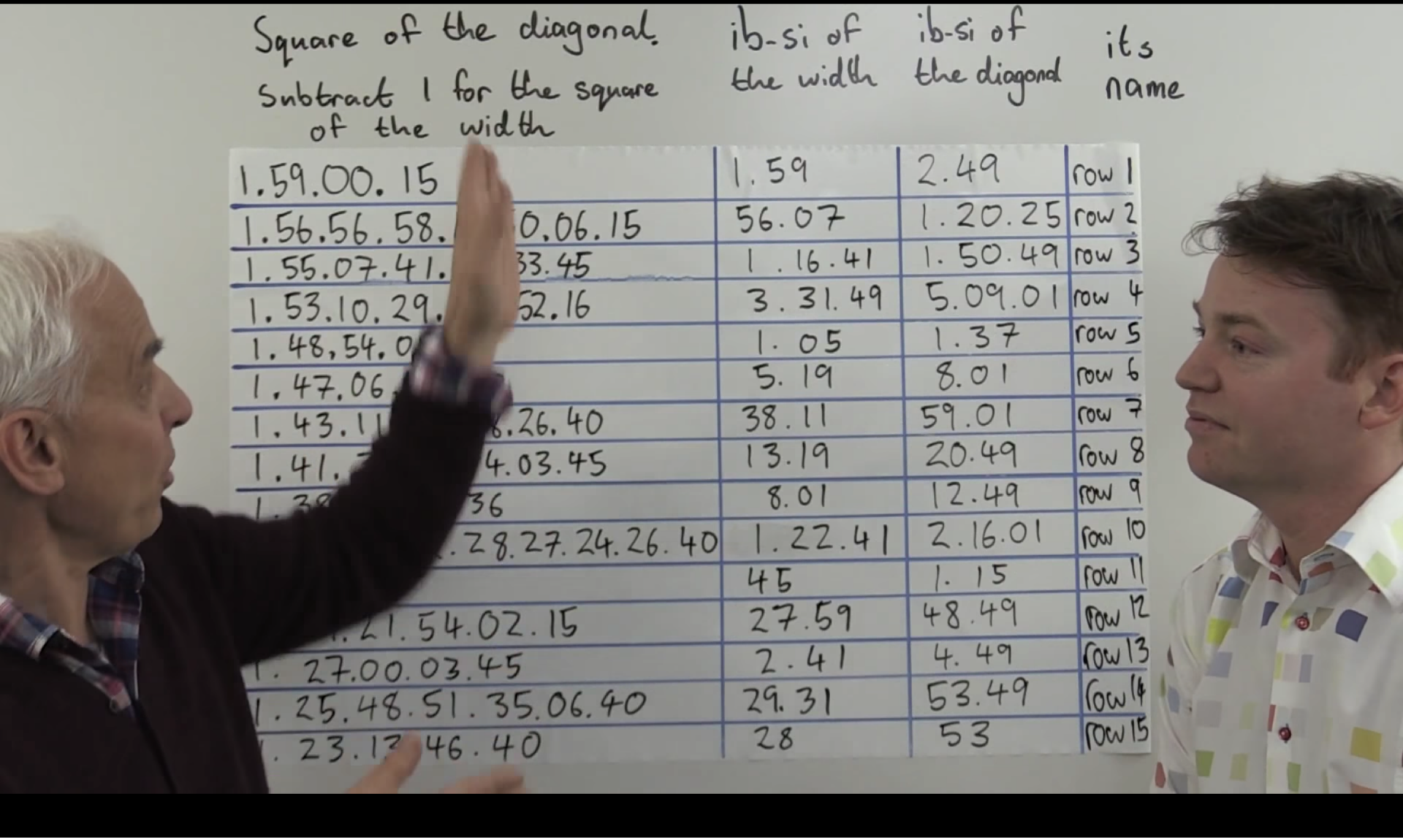


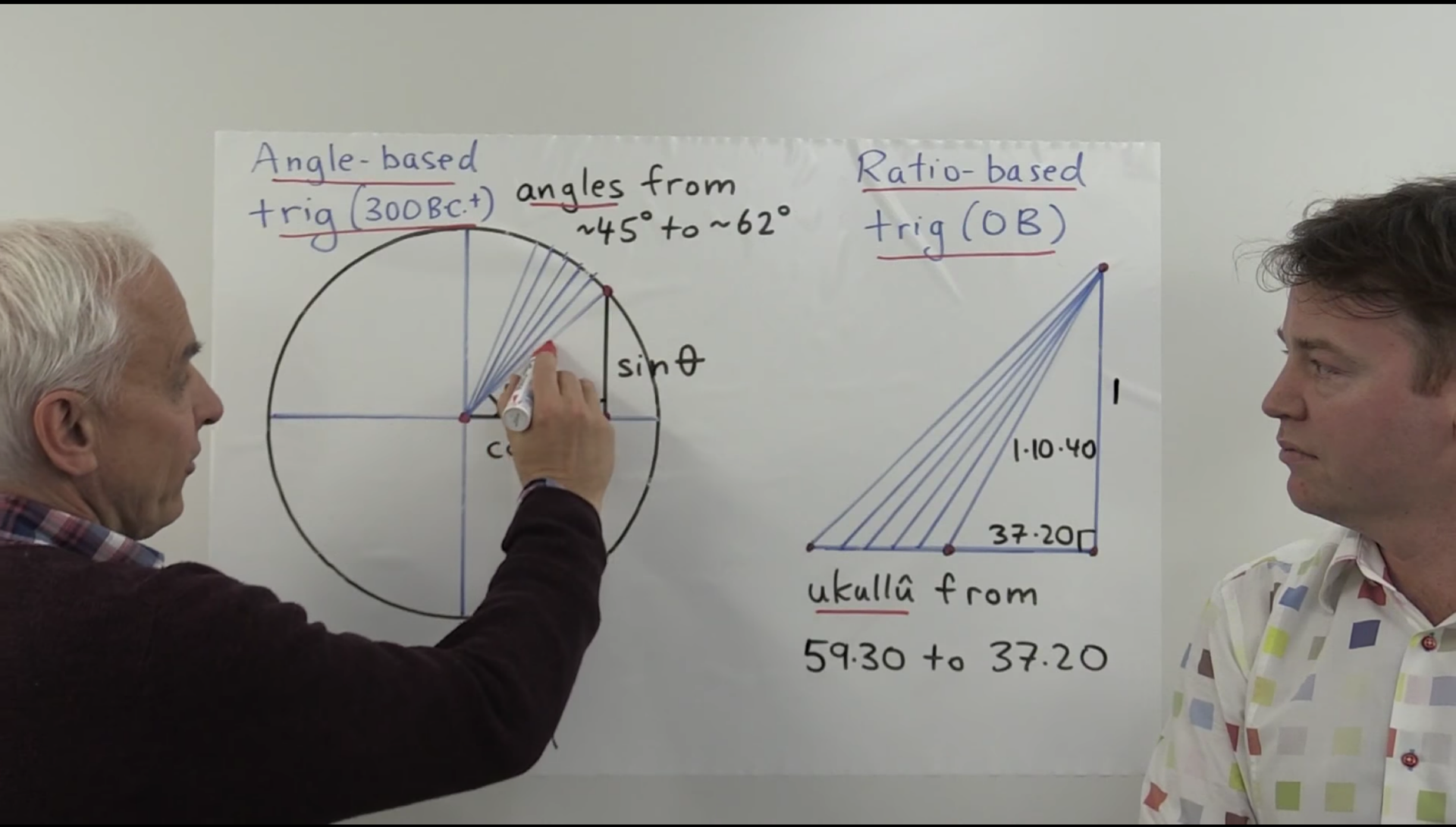
Wikipediaおすすめの通説を見て、あまり感心しなかったのだが、これは納得。
2017年の成果。

Youtube:
https://goo.gl/Tv9WAj

“Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigo-nometry”
https://goo.gl/PKhNJG

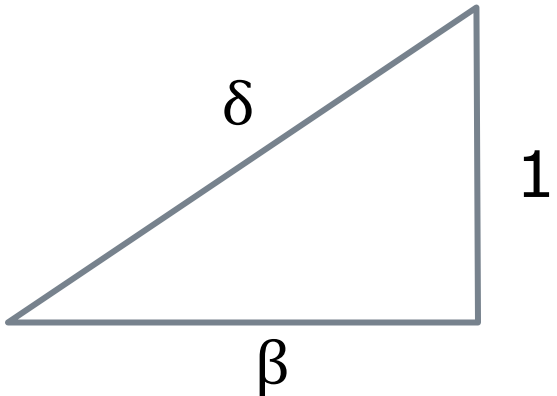



Square of the diagonal
Subtract 1 for the square of the width
ib-si of the width
ib-si of the diagonal
its name
1.59.00.15
1.59
2.49
row 1
1.56.56.58.
0.06.15
56.07
1.20.25
row 2
1.55.07.41.
33.45
1.16.41
1.50.49
row 3
1.53.10.29.
52.16
3.31.49
5.09.01
row 4
1.48,54.0
1.05
1.37
row 5
1.47.06
5.19
8.01
row 6
1.43.11
.26.40
38.11
59.01
row 7
1.41.
4.03.45
13.19
20.49
row 8
36
8.01
12.49
row 9
.28.27.24.26.40
1.22.41
2.16.01
row 10
45
1.15
row 11
.21.54.02.15
27.59
48.49
row 12
1. 27.00.03.45
2.41
4.49
row 13
1.25.48.51.35.06.40
29.31
53.49
row 14
.23.1 46.40
28
53
row 15


Angle-based
trig (300BC.+)
angles from
~45° to ~62°
sinθ
Ratio-based
trig (OB)
1
1·10·40
37·20
ukullû from
59·30 to 37·20

β	δ	δ²	β:1	δ:1	#
I:β base	II:δ diagonal	I′:δ² diagonal squared	II′:b	III′:d	IV
59.30	1.24.30	1.59.00.15	1.59	2.49	1
58.27.17.30	1.23.46.02.30	1.56.56.58.14.50.06.15	56.07	1.20.25	2
57.30.45	1.23.06.45	1.55.07.41.15.33.45	1.16.41	1.50.49	3
56.29.04	1.22.24.16	1.53.10.29.32.52.16	3.31.49	5.09.01	4
54.10	1.20.50	1.48.54.01.40	1.05	1.37	5
53.10	1.20.10	1.47.06.41.40	5.19	8.01	6
50.54.40	1.18.41.20	1.43.11.56.28.26.40	38.11	59.01	7
49.56.15	1.18.03.45	1.41.33.45.14.03.45	13.19	20.49	8
48.06	1.16.54	1.38.33.36.36	8.01	12.49	9
45.56.06.40	1.15.33.53.20	1.35.10.02.28.27.24.26.40	1.22.41	2.16.01	1
45	1.15	1.33.45	45	1.15	1
41.58.30	1.13.13.30	1.29.21.54.02.15	27.59	48.49	1
40.15	1.12.15	1.27.00.03.45	2.41	4.49	1
39.21.20	1.11.45.20	1.25.48.51.35.06.40	29.31	53.49	1
37.20	1.10.40	1.23.13.46.40	28	53	1
36.27.30	1.10.12.30	1.22.09.12.36.15	2.55	5.37	1
32.50.50	1.08.24.10	1.17.58.56.24.01.40	7.53	16.25	1
32	1.08	1.17.04	8	17	1
30.04.53.20	1.07.07.06.40	1.15.04.53.43.54.04.26.40	1.07.41	2.31.01	1
29.15	1.06.45	1.14.15.33.45	39	1.29	2
27.40.30	1.06.04.30	1.12.45.54.20.15	6.09	14.41	2

β	δ	δ²	β:1	δ:1	#
I:β base	II:δ diagonal	I′:δ² diagonal squared	II′:b	III′:d	IV
25	1.05	1.10.25	5	13	2
24.11.40	1.04.41.40	1.09.45.22.16.06.40	14.31	38.49	2
22.22	1.04.02	1.08.20.16.04	11.11	32.01	2
21.34.22.30	1.03.45.37.30	1.07.45.23.26.38.26.15	34.31	1.42.01	2
20.51.15	1.03.31.15	1.07.14.53.46.33.45	16.41	50.49	2
20.04	1.03.16	1.06.42.40.16	5.01	15.49	2
18.16.40	1.02.43.20	1.05.34.04.37.46.40	5.29	18.49	2
17.30	1.02.30	1.05.06.15	7	25	2
14.57.45	1.01.50.15	1.03.43.52.35.03.45	6.39	27.29	3
13.30	1.01.30	1.03.02.15	9	41	3
11	1.01	1.02.01	11	1.01	3
10.14.35	1.00.52.05	1.01.44.55.12.40.25	4.55	29.13	3
7.05	1.00.25	1.00.50.10.25	17	2.25	3
6.20	1.00.20	1.00.40.06.40	19	3.01	3
4.37.20	1.00.10.40	1.00.21.21.53.46.40	52	11.17	3
3.52.30	1.00.07.30	1.00.15.00.56.15	31	8.01	3
2.27	1.00.03	1.00.06.00.09	49	20.01	3



ピタゴラス数

$a^2 + b^2 = c^2$ を満たす自然数の組 (a, b, c)

a : 3, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 20, 21,… (

b : 4, 12, 15, 21, 24, 35, 40, 45, 55, 56, 60, 63, 72, 77,…

c : 5, 13, 17, 25, 29, 37, 41, 53, 61, 65, 65, 73, 85, 85,…

フェルマーの定理

3 以上の自然数 n について、
$x^n + y^n = z^n$ となる自然数の組 (x, y, z) は存在しない、

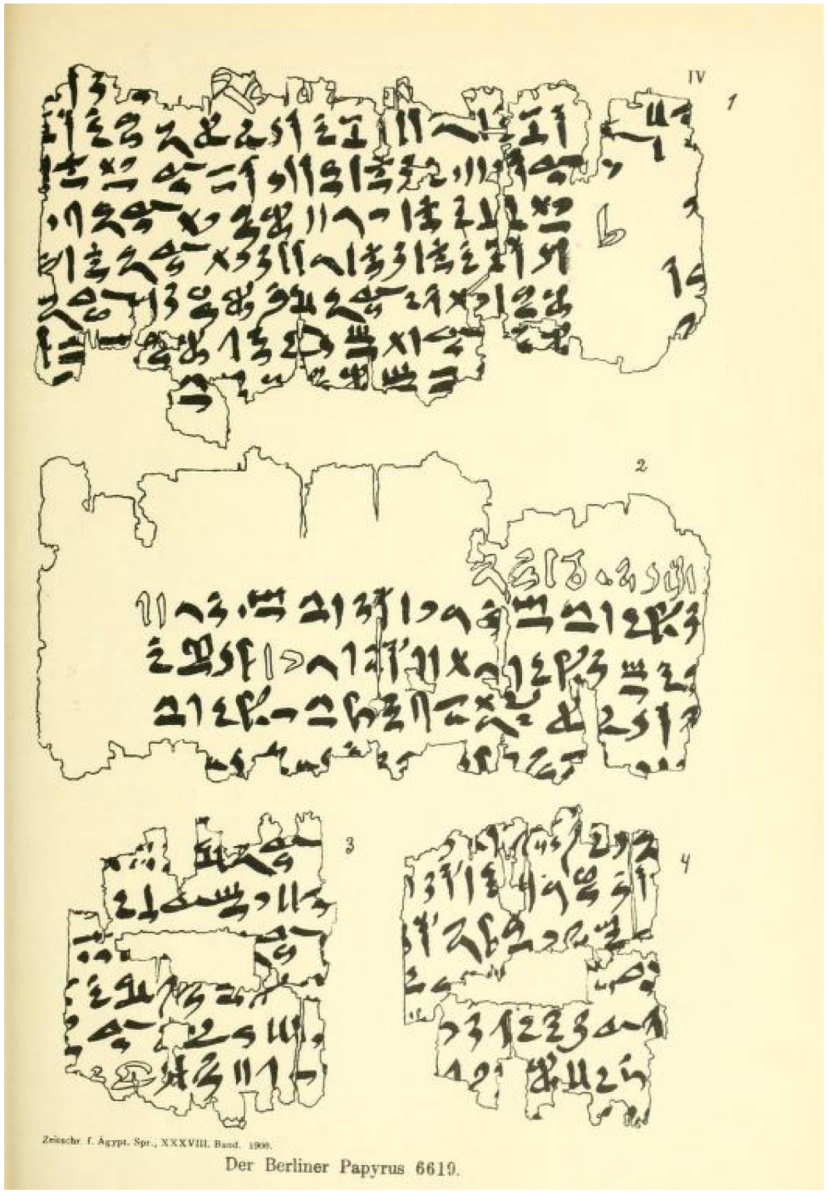
1994年、アンドリュー・ワイルズによって解決される。

エジプトの数学　Berlin Papyrus 6619

パピルスに次のような数学の問題が
残されている。

「大きな正方形の面積が 100 で、
それは二つの小さな正方形の面積の和に
等しいという。一つの小さい正方形の辺が、
もう一つの小さな正方形の辺の3/4倍で
ある時に、それぞれの辺の長さを求めよ。」

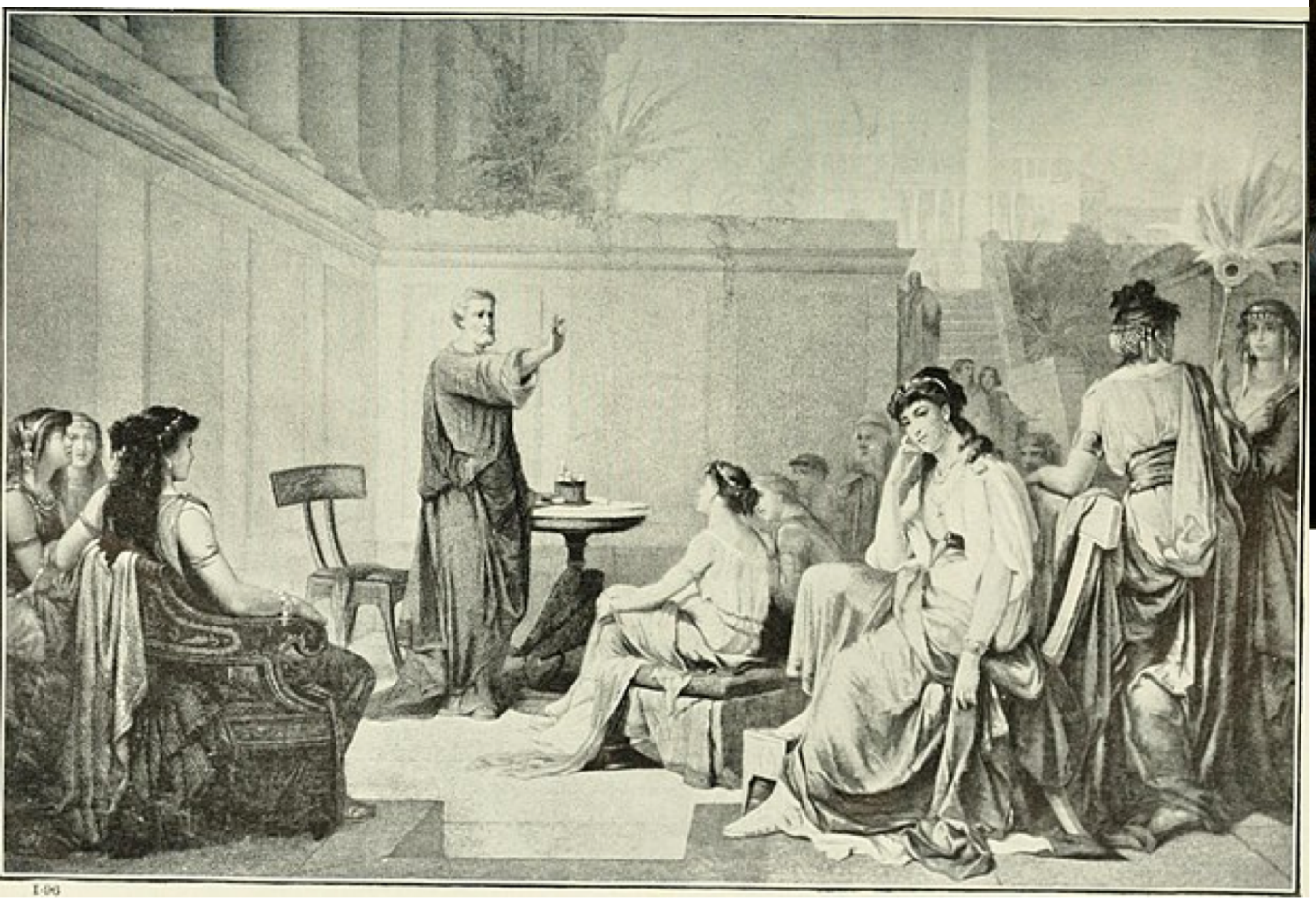
~1800 BC

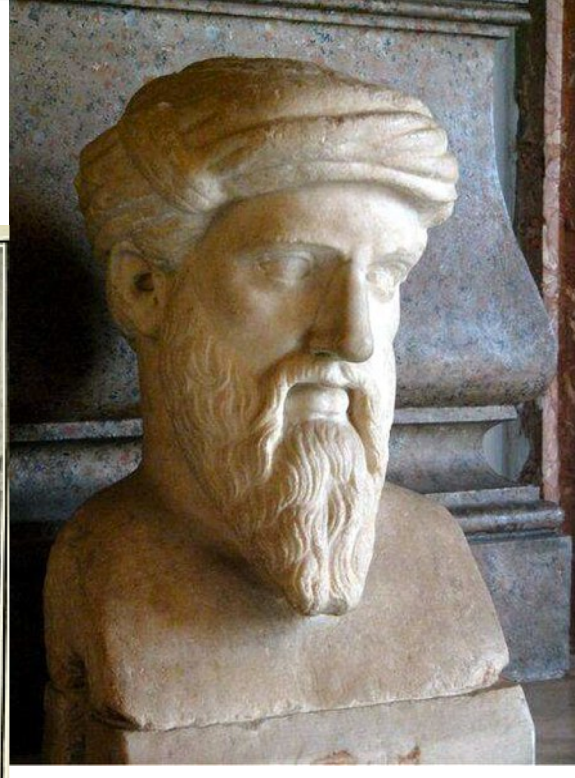


古代ギリシャの数学:ピタゴラスの定理

ピタゴラス	582 BC ～ 496 BC
プラトン	427 BC ～ 347 BC
ユークリッド	330 BC ～ 276 BC ?
アルキメデス	287 BC ～ 212 BC
エラトステネス	275 BC ～ 194 BC

ピタゴラス



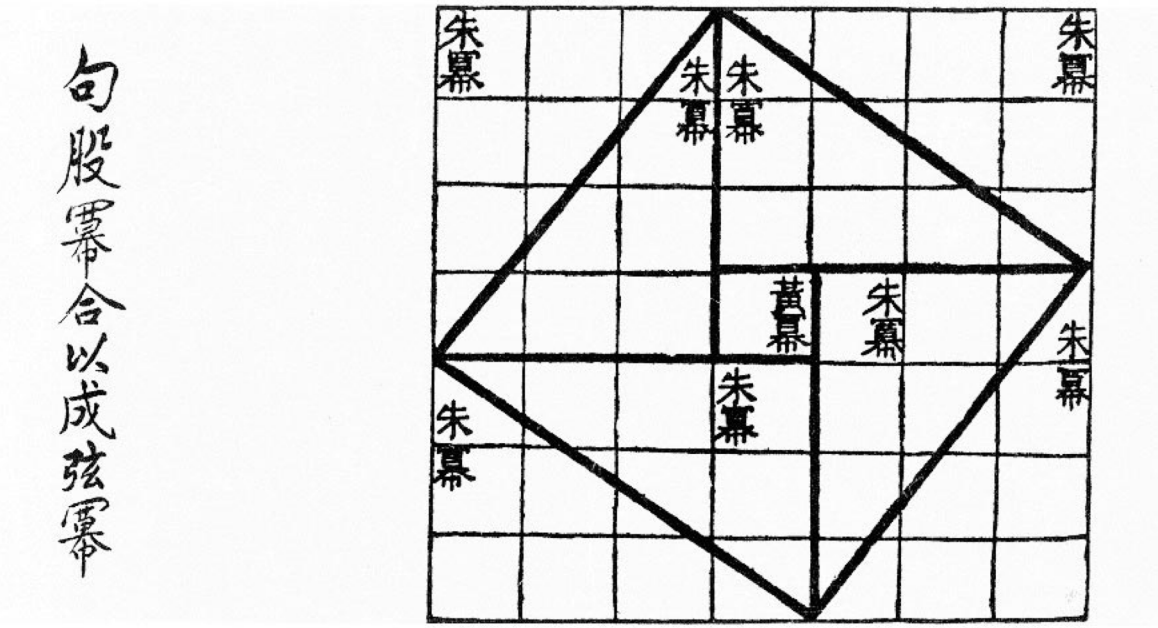


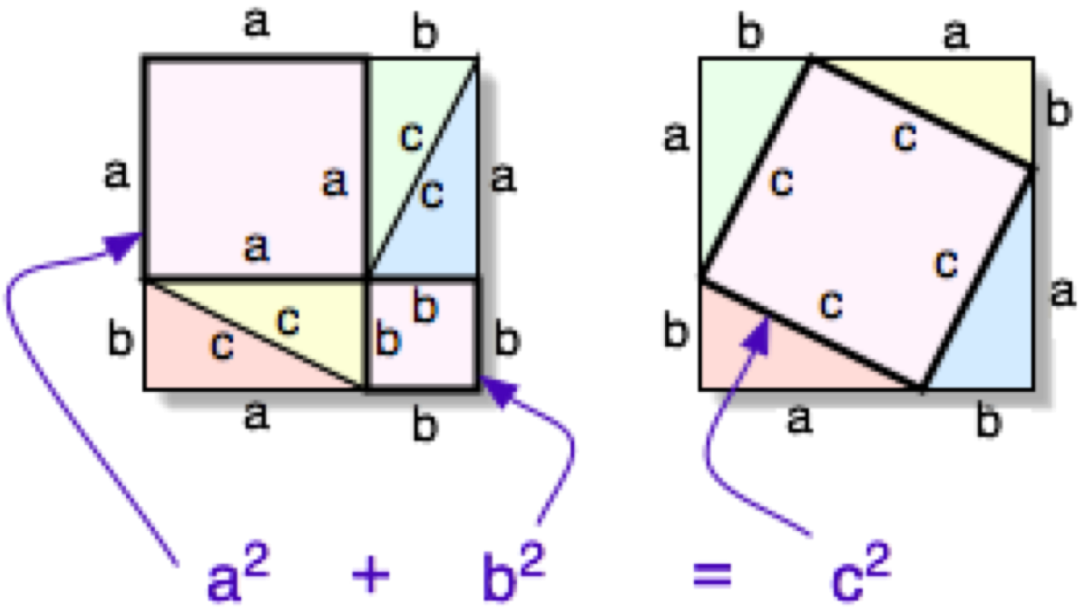
570 BC~495 BC

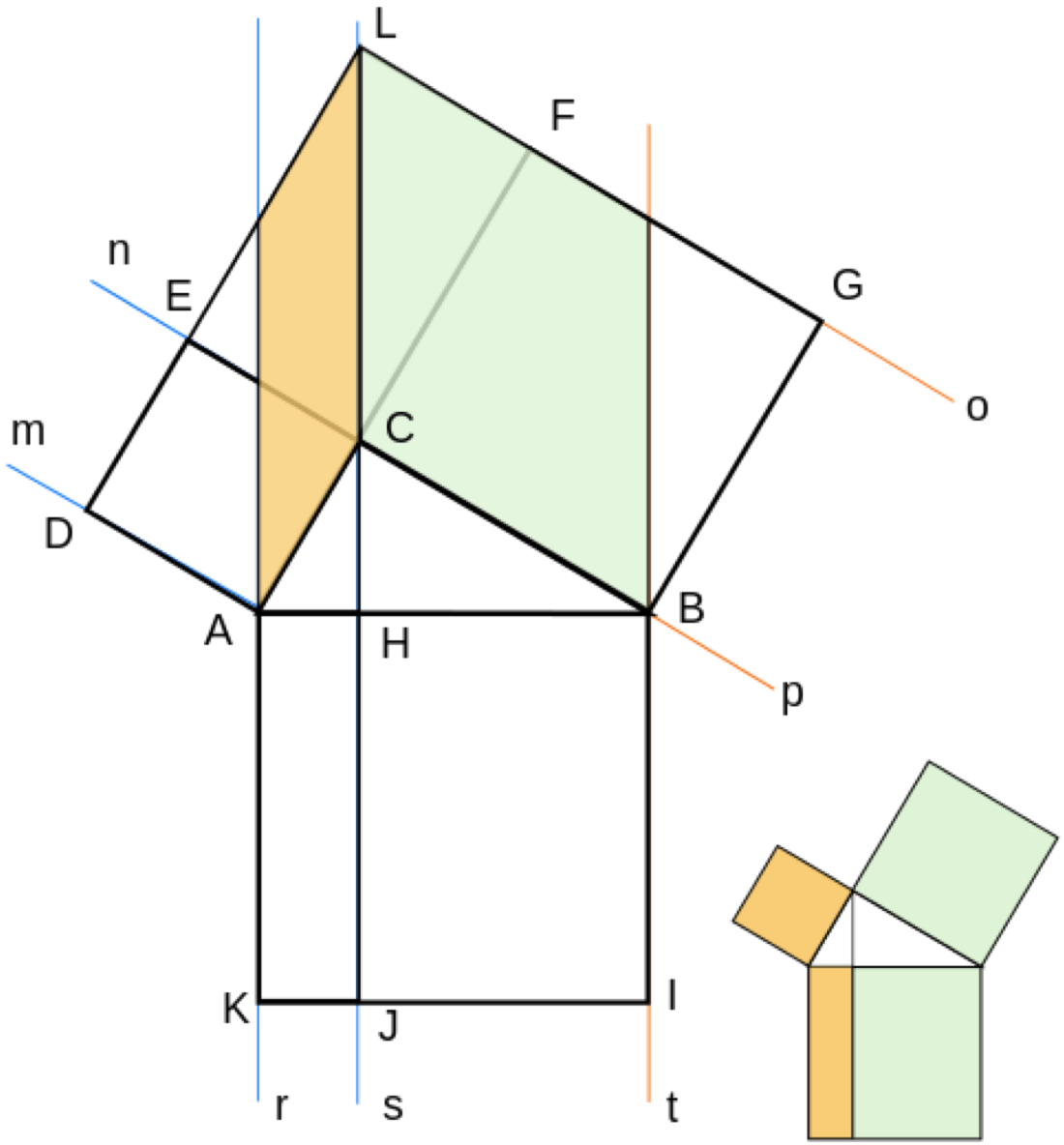
Illustration from 1913 showing Pythagoras teaching a class of women. Pythagoras believed that women should be taught philosophy as well as men and many prominent members of his school were women.



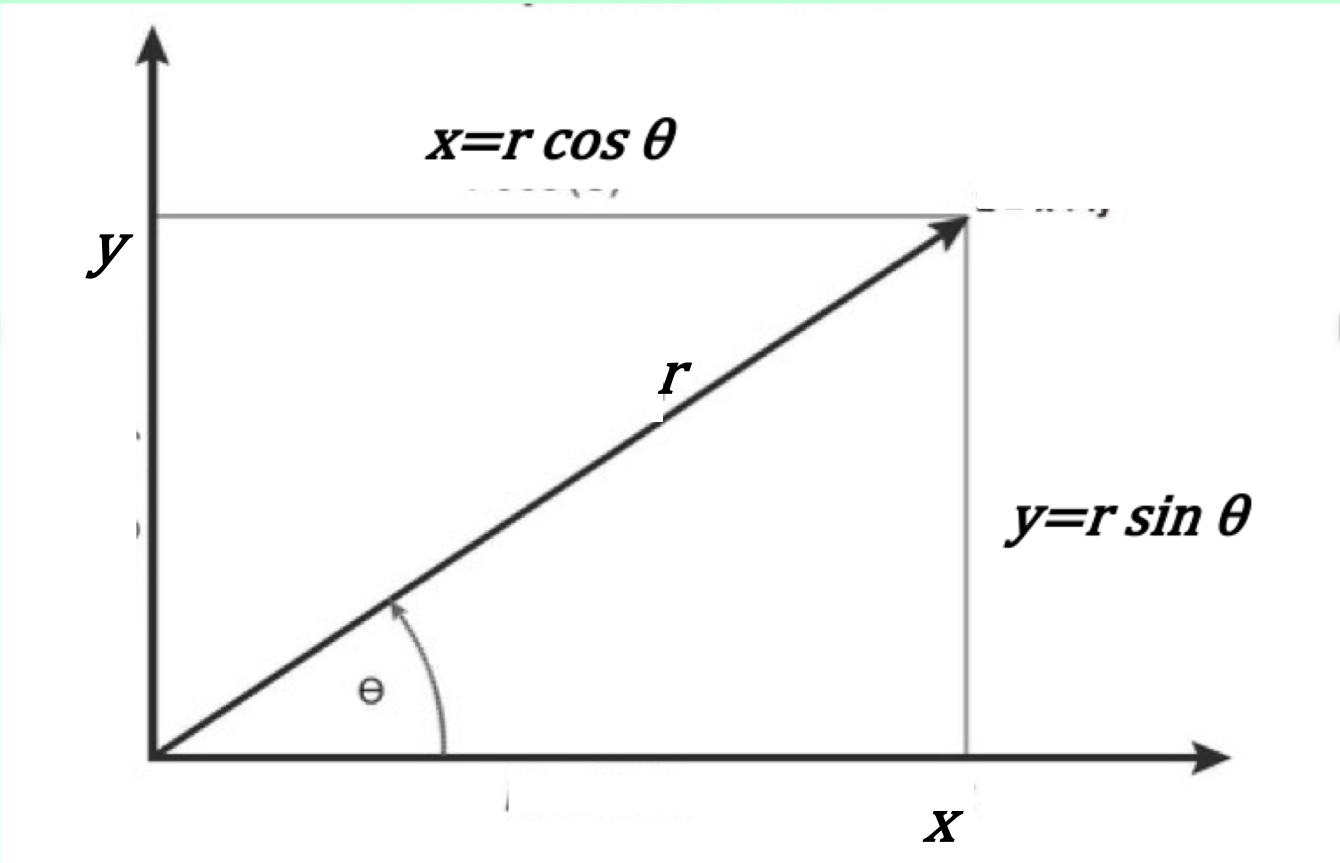
Pythagorean Women: Their History and Writings
by Sarah B. Pomeroy https://goo.gl/vCZpEL




a
b
c
a
b
c
a
b
c
a
b
c
a
b
c
a
b
c
a
b
c
a
b
a
b
a
b

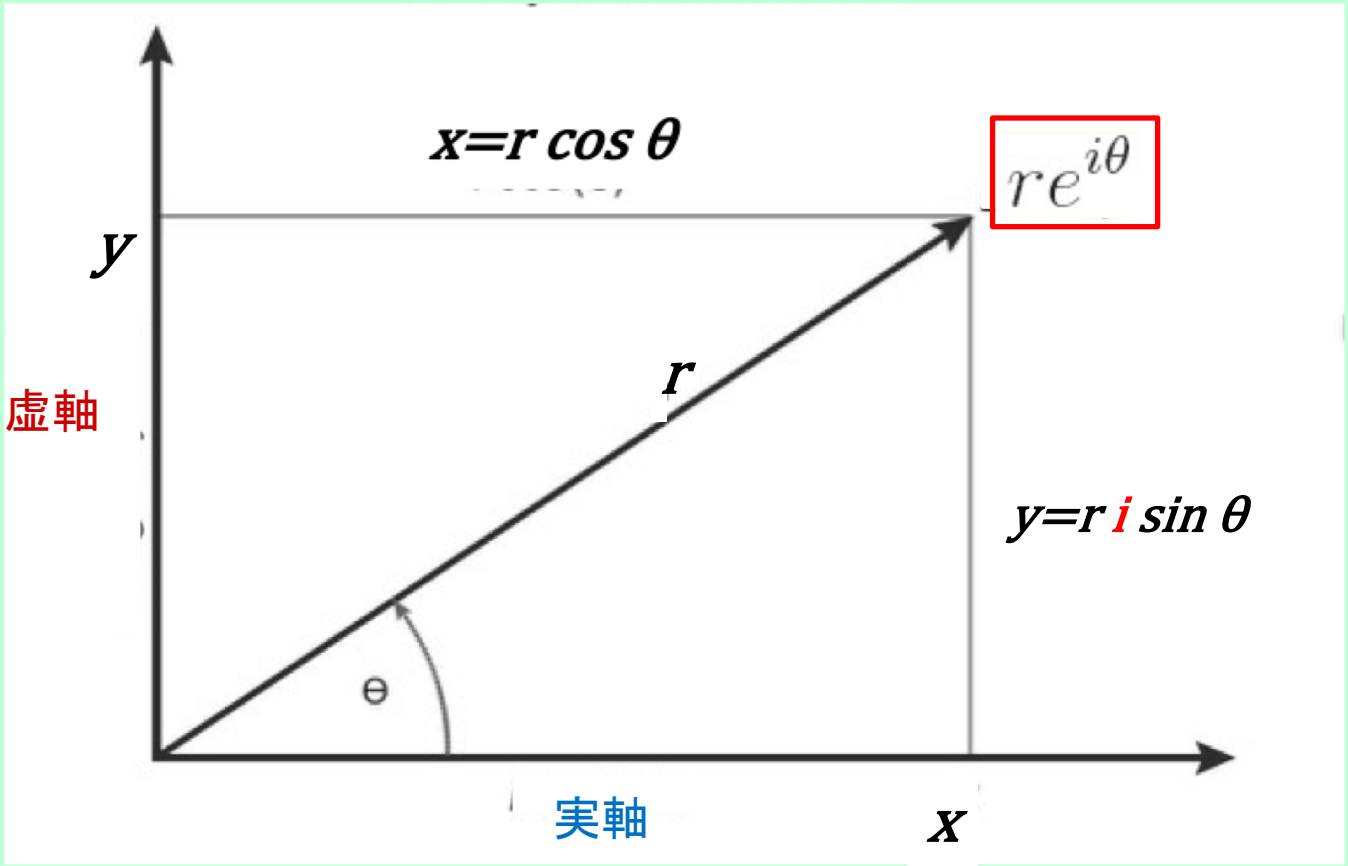

L
F
n
E
G
o
m
C
D
A
H
B
p
K
J
I
r
s
t

三角関数を使った証明



$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2$$

複素平面(実数を成分とする)と極座標



$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

$z = x + iy$

$z^* = x - iy$

$-1 = e^{-i\pi}$　オイラーの式

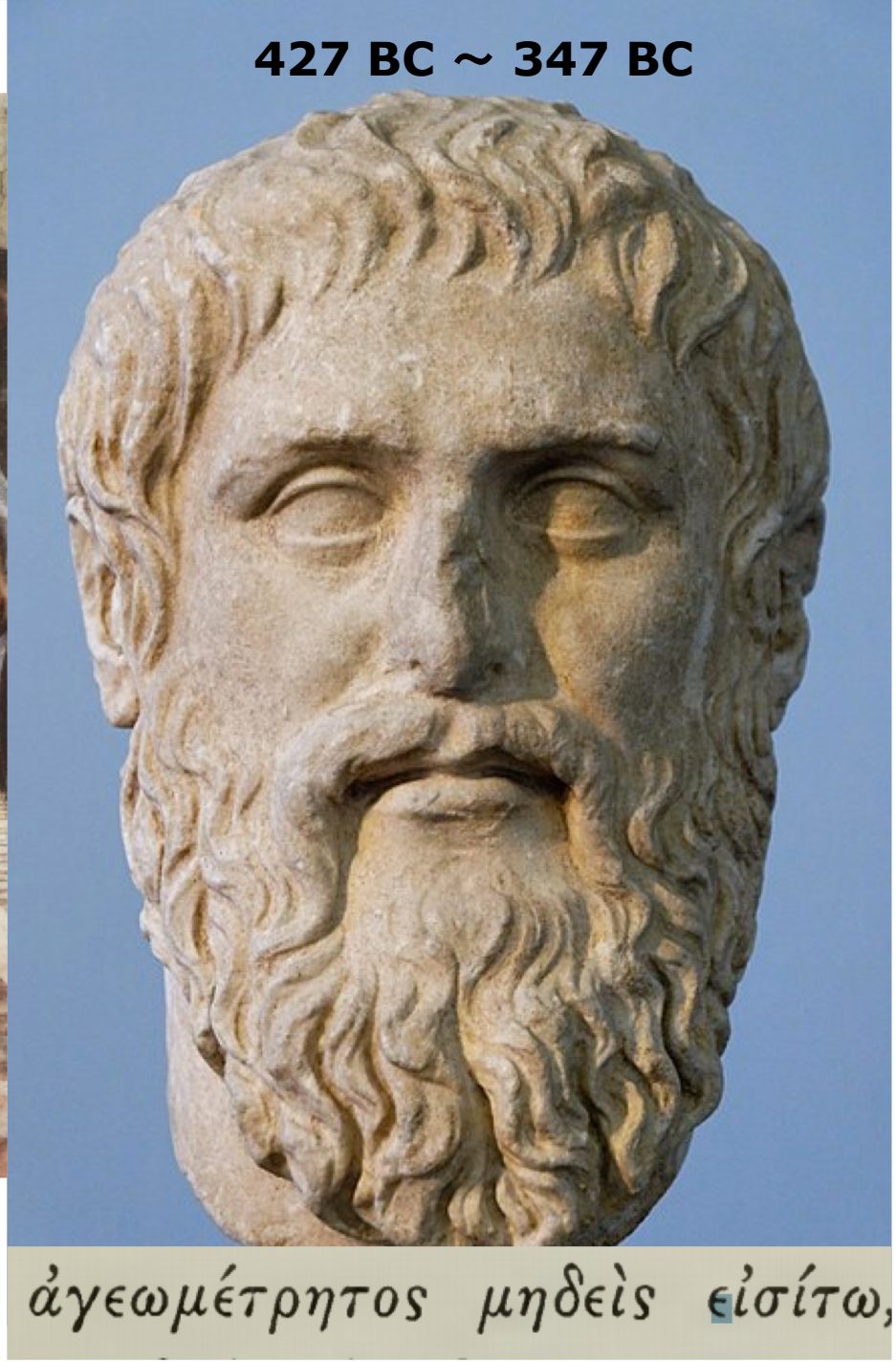
「幾何学を知らざる者、入るべからず」
プラトン：思惟の世界と実在の世界



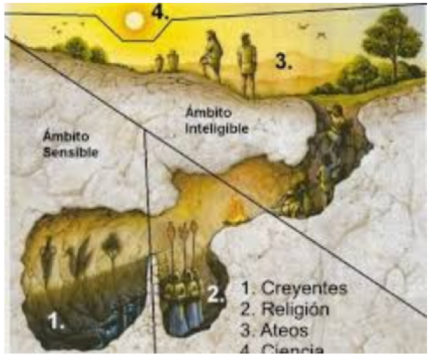
ラファエロの壁画「アテナイの学堂」から

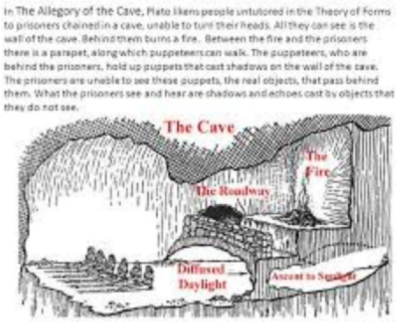


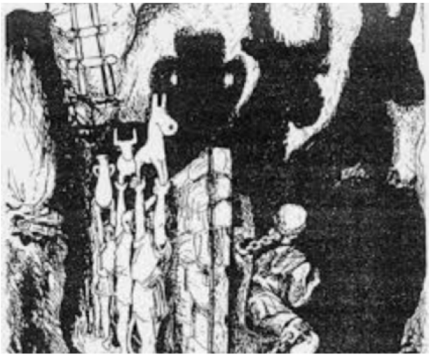
427 BC ~ 347 BC

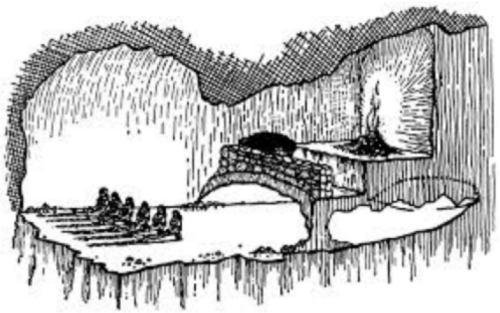


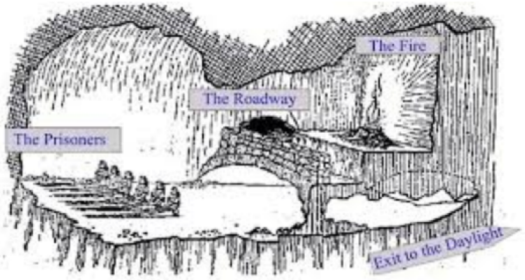


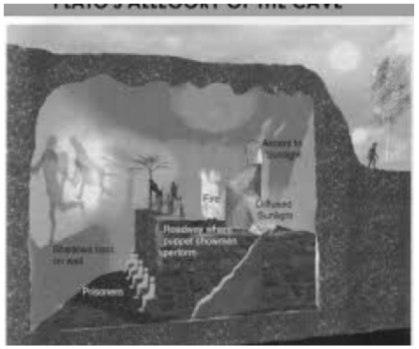




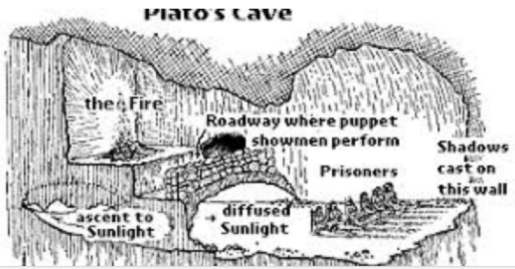






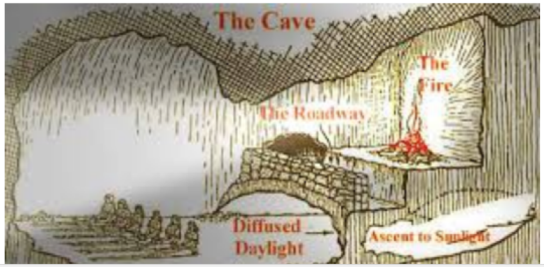






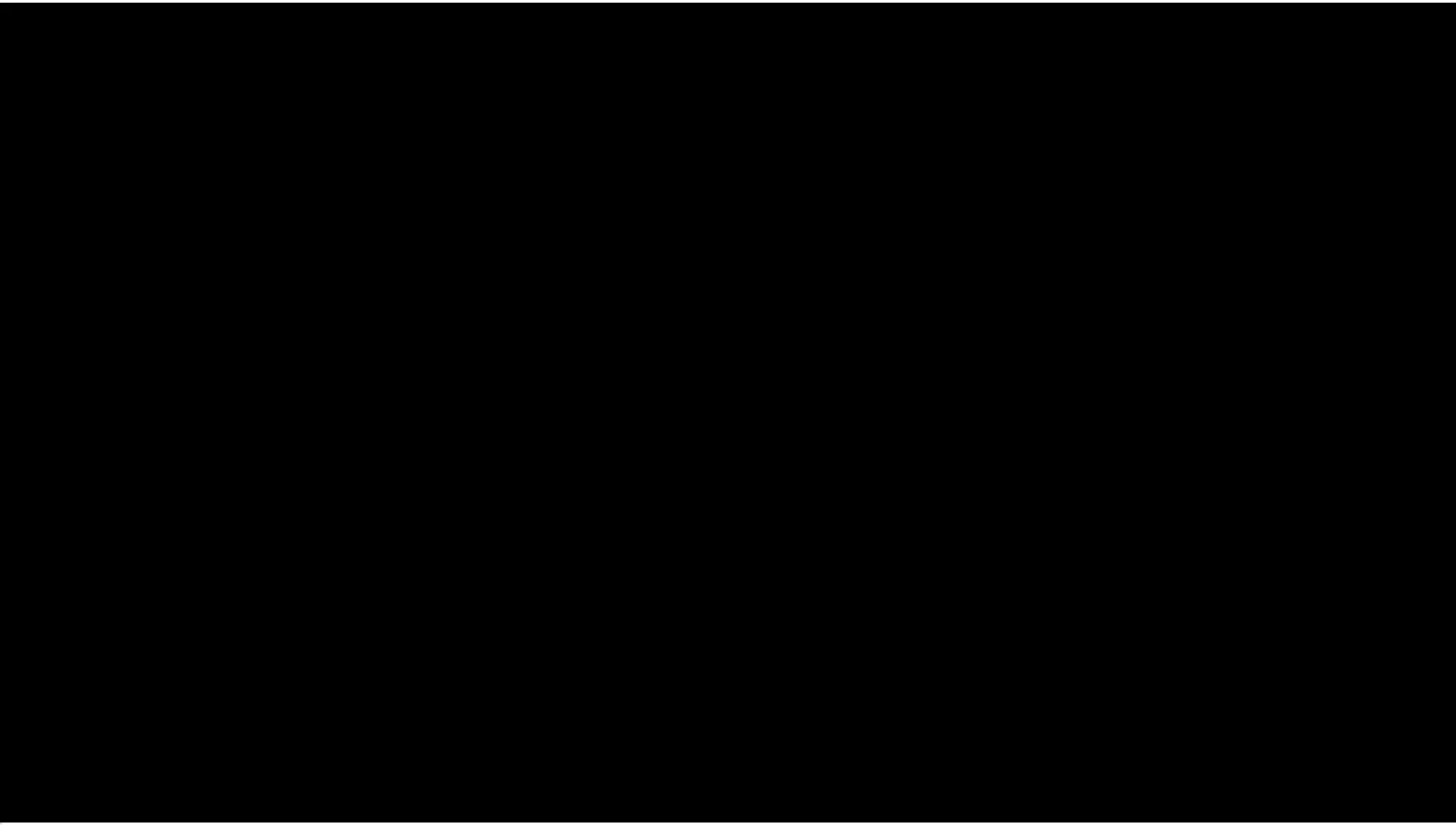






地下の洞窟に住んでいる人々を想像してみよう。明かりに向かって洞窟の幅いっぱいの通路が入口まで達している。人々は、子どもの頃から手足も首も縛られていて動くことができず、ずっと洞窟の奥を見ながら、振り返ることもできない。入口のはるか上方に火が燃えていて、人々をうしろから照らしている。火と人々のあいだに道があり、道に沿って低い壁が作られている。……壁に沿って、いろんな種類の道具、木や石などで作られた人間や動物の像が、壁の上に差し上げられながら運ばれていく。運んでいく人々のなかには、声を出すものもいれば、黙っているものもいる。

プラトンの「洞窟の喩え」

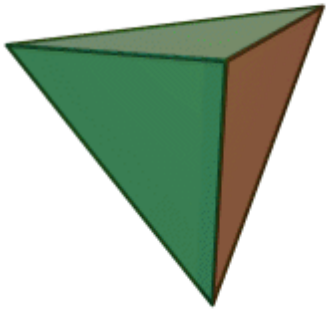


https://goo.gl/RjpuqX

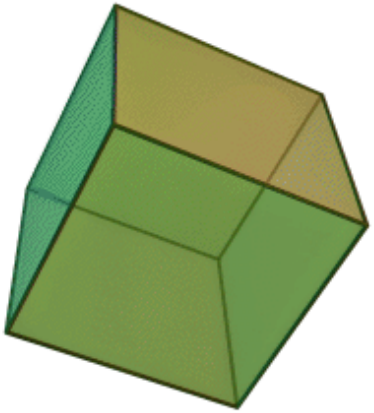
プラトンの「観念実在論」

- 「洞窟の喩え」で、影を生み出しているのは「形相（エイドス）Form」と呼ばれるものである。光・太陽にあたるのは「ロゴス」である。
- プラトンは、真実の実在の世界は、日常的に感覚される世界を超えたものであると考える。我々が、我々のまわりに感じるものは、その真実の世界の影に過ぎない。
- 我々の世界は、常に変化し、その変化を感覚で知るに過ぎない。真実の実在の世界は、我々の住む世界の他にある。
- その真実の世界は、変化することもなく永遠である。そこは感覚の世界ではなくイデア（観念）の世界であり、我々がこの地上で知っているものの、完全な形相が存在する世界である。
- 数学の対象（数や三角形）は、この形相の世界に存する。

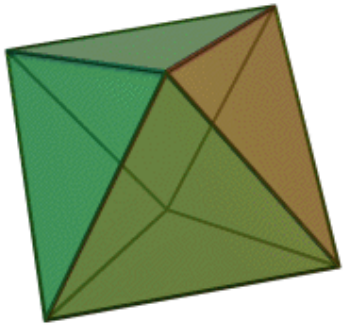
プラトンの立体（正多面体）



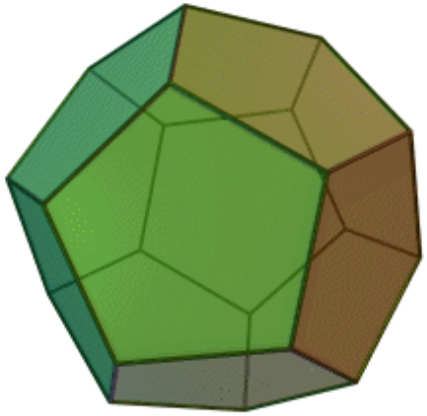
正四面体



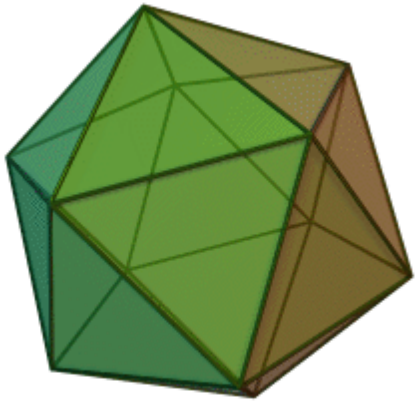
正六面体



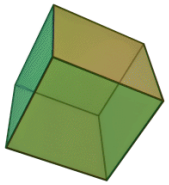
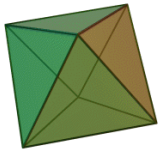
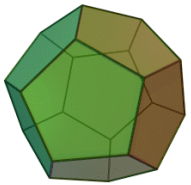
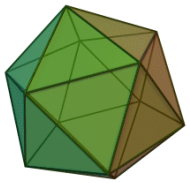
正八面体



正十二面体

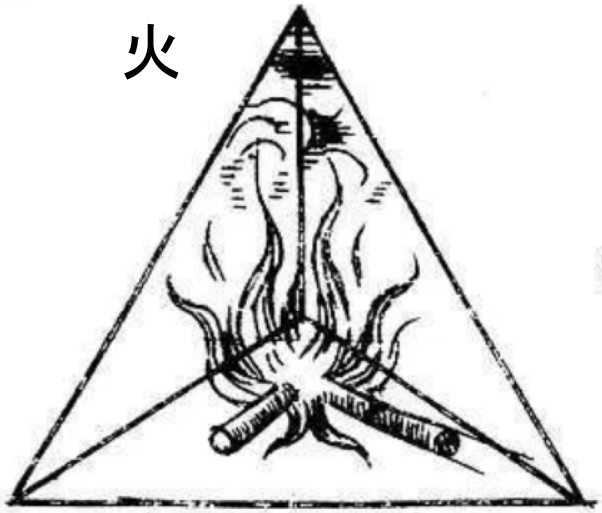


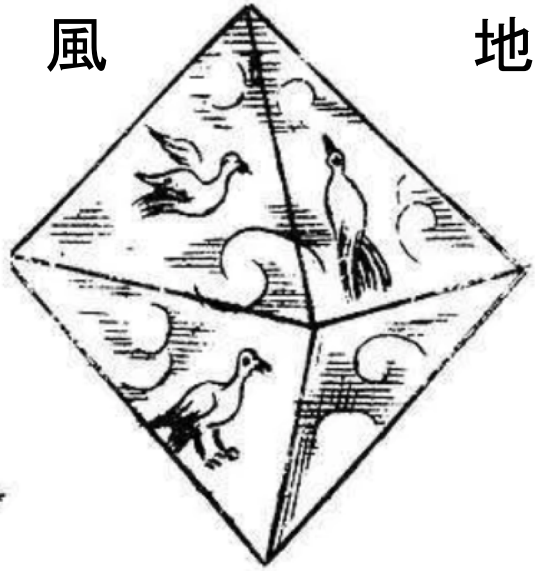
正二十面体

名前		面の数	辺の数	頂点の数
正四面体 tetrahedron		4	6	4
正六面体 cube		6	12	8
正八面体 octahedron		8	12	6
正十二面体 dodecahedron		12	30	20
正二十面体 icosahedron		20	30	12

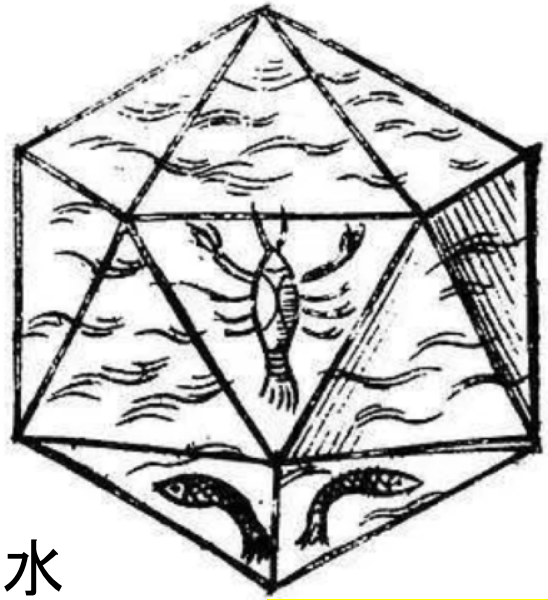
オイラーの標数: 頂点の数 − 辺の数 + 面の数　全て 2 になる

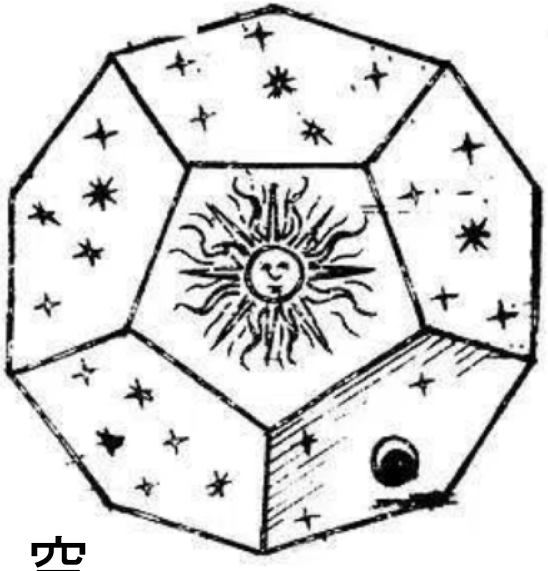
ケプラーの “Mysterium Cosmographicum”(1596年)から







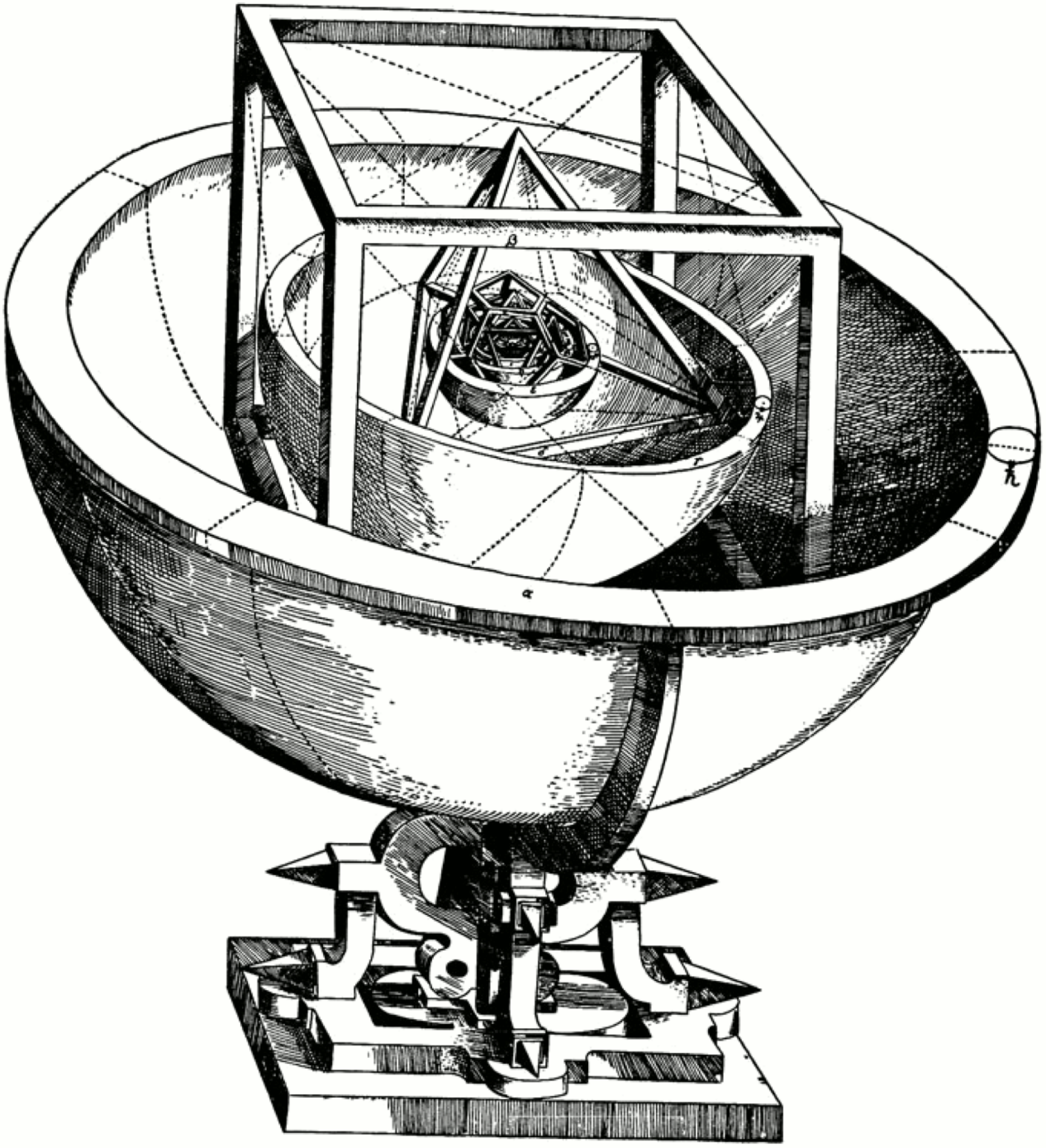




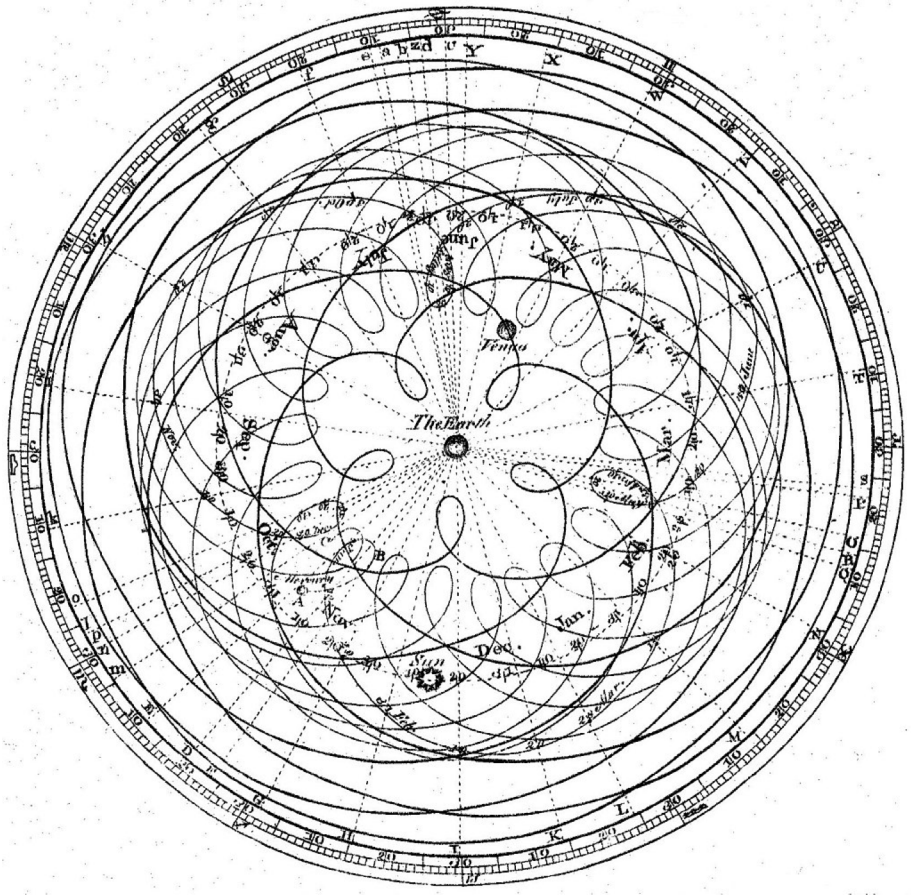
https://goo.gl/mYr3cj

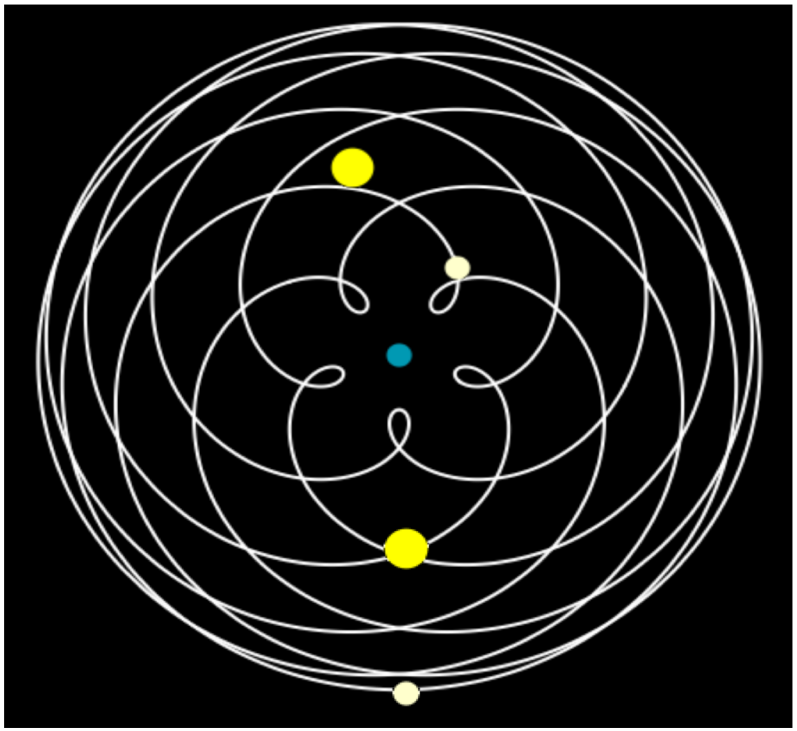


Mercury, Venus, Earth, Mars, Jupiter and Saturn


β
γ
α
h

James Ferguson (1710-1776), based on similar diagrams by Giovanni Cassini (1625-1712) and Dr Roger Long (1680-1770);





Appollonius / Ptolemy の周転円

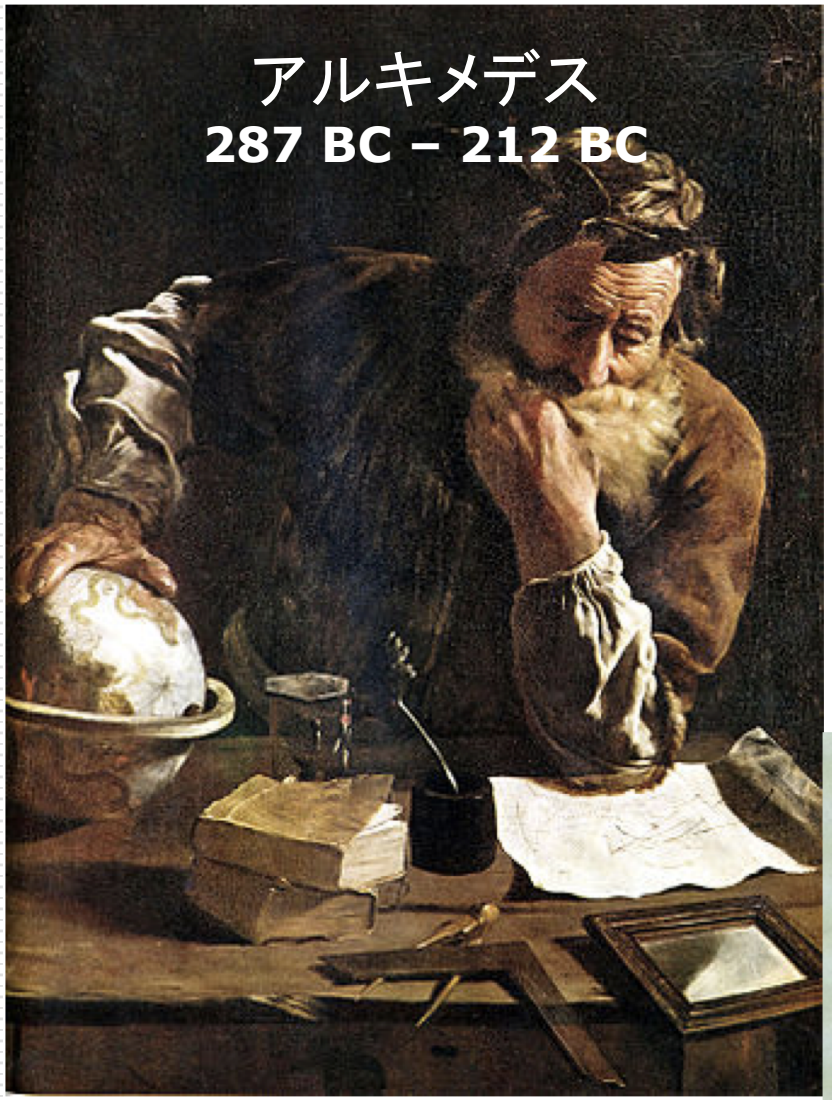
The Pentagram of Venus https://goo.gl/YGZEj3

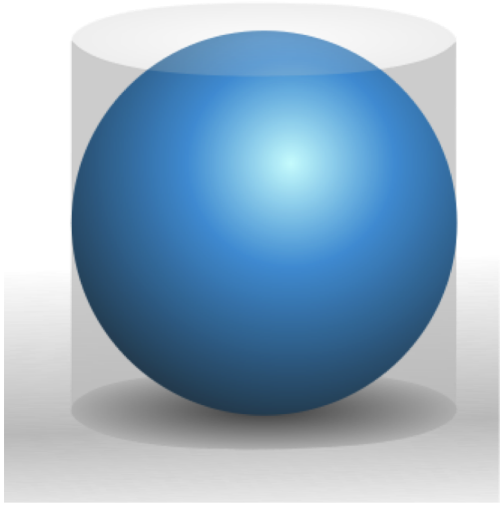
ユークリッド:「幾何学原論」

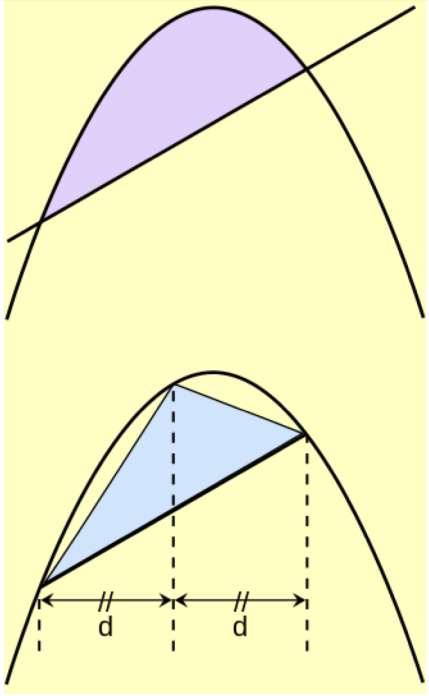
「20世紀初頭に至るまで標準的な数学の教科書の一つとして使われていたため、西洋の書物では聖書に次いで世界中で読まれてきた本とも評される。」

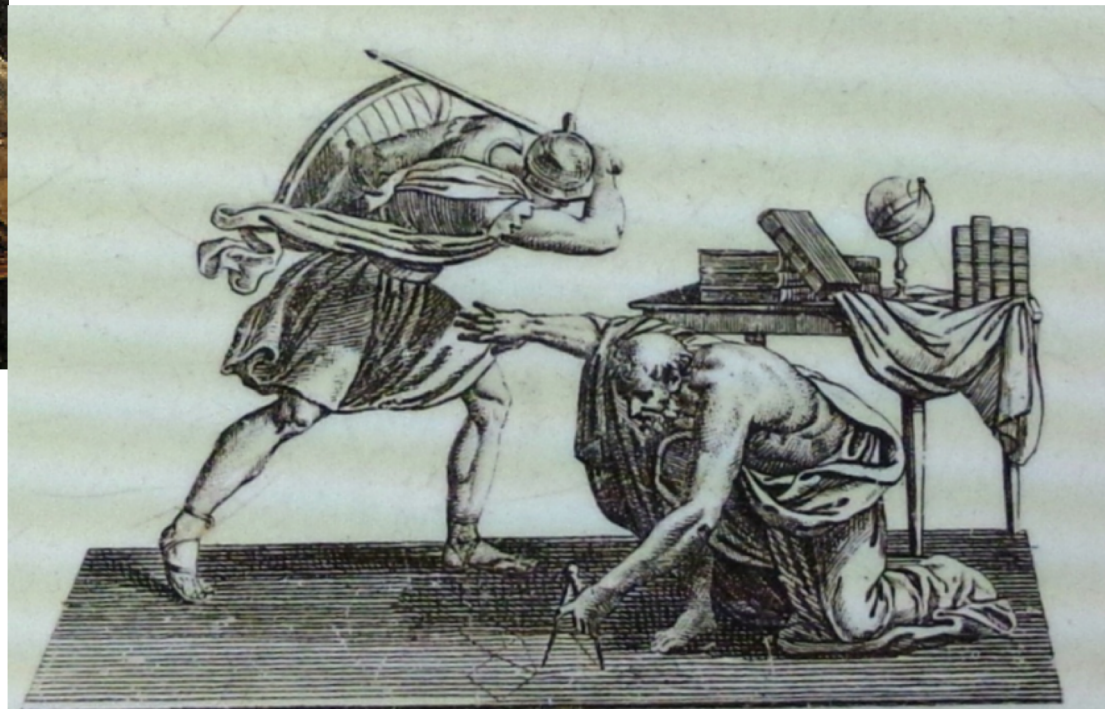


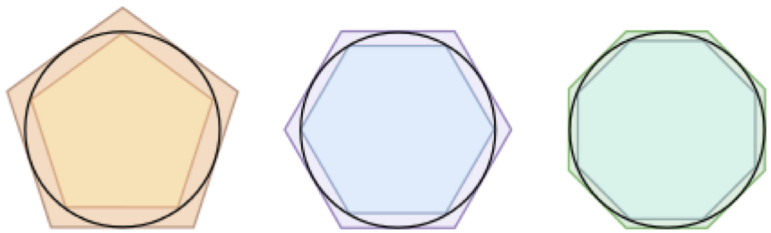
ラファエロの壁画「アテナイの学堂」から


アルキメデス
287 BC – 212 BC



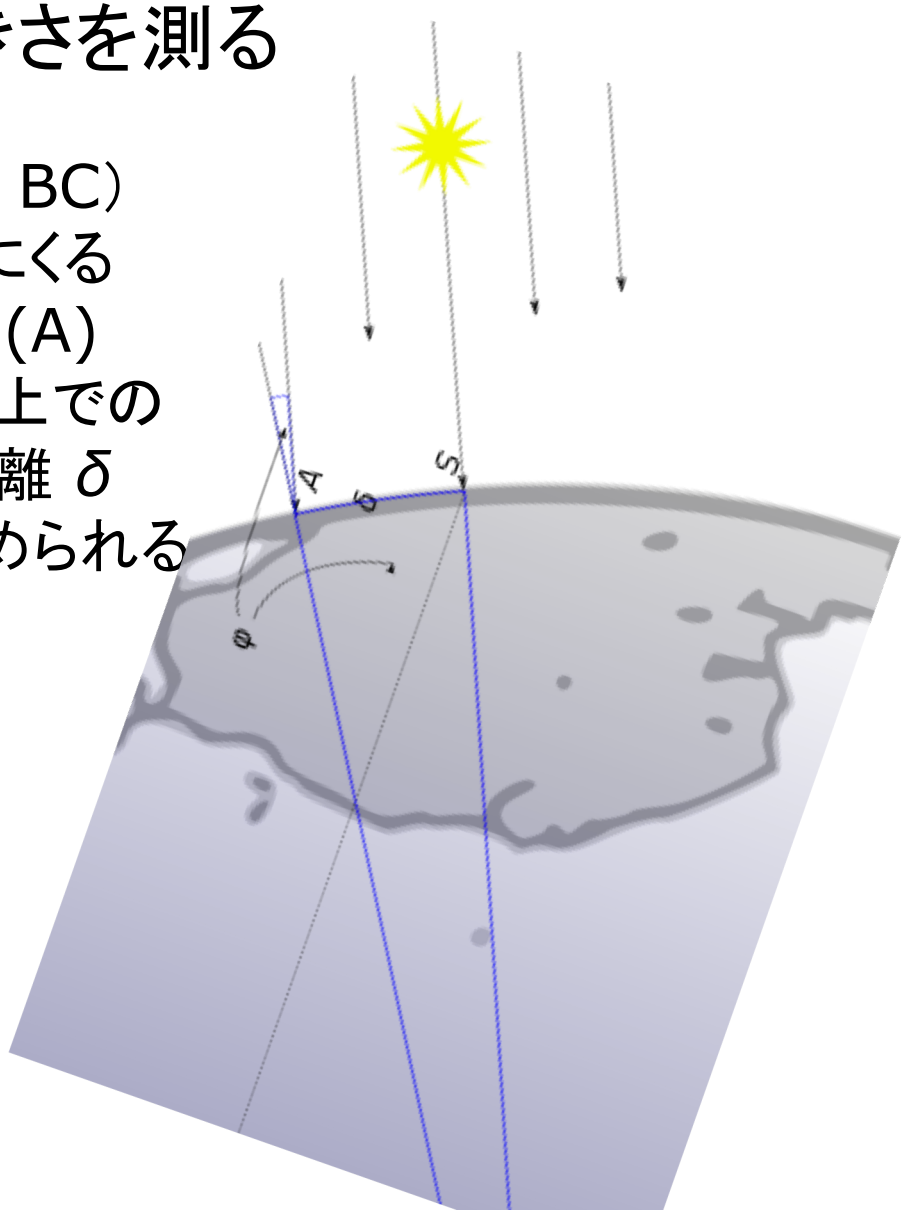

d
d



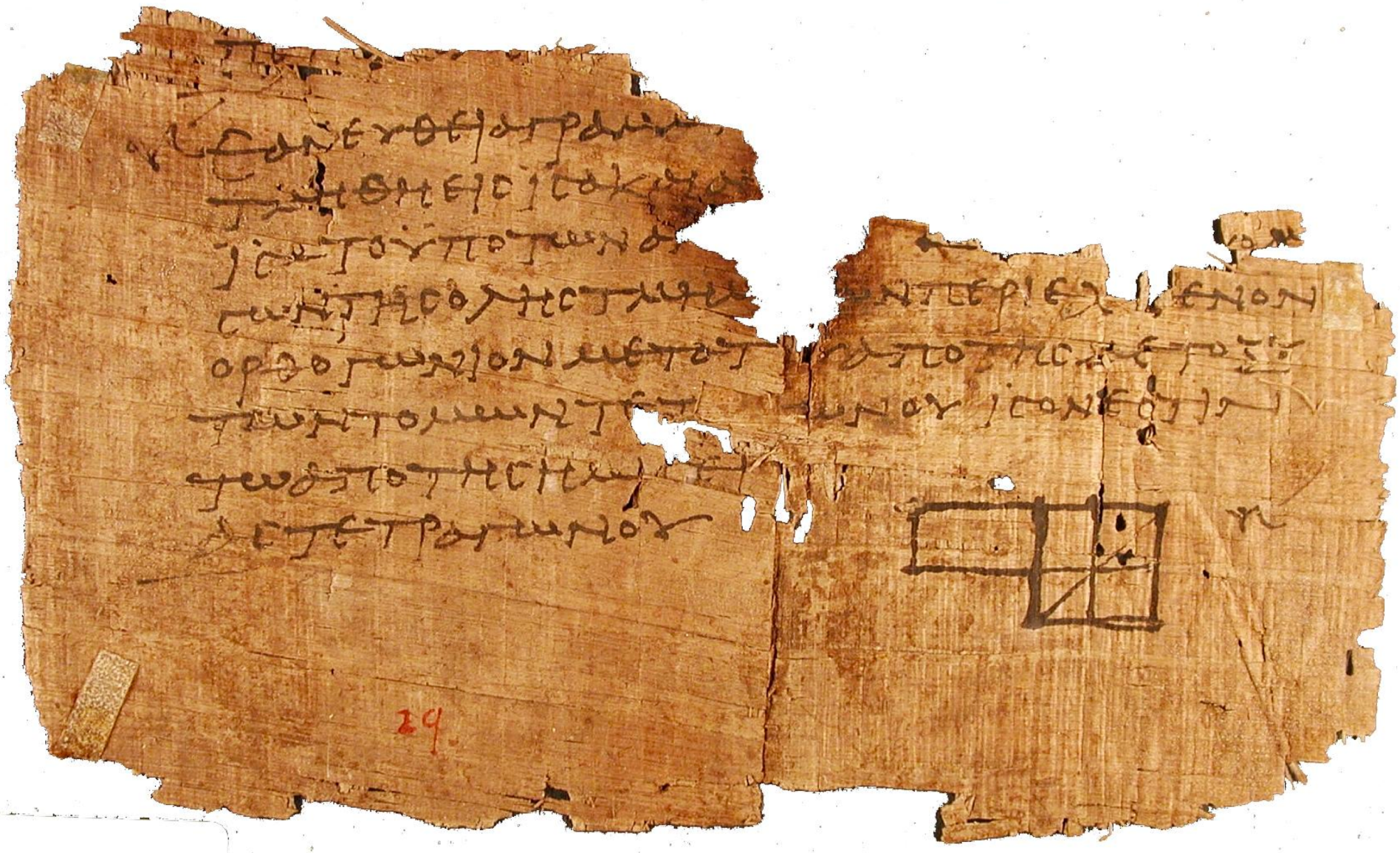


エラトステネス　地球の大きさを測る

- エラトステネス（275 BC～194 BC）は、シエネ (S) で太陽が真上にくる日の同経度のアレクサンドリア (A) での影が作る角度 φ は、地球上での緯度の差に等しく、両地点の距離 δ がわかれば地球の大きさが求められるとして実際に計算して見せた。



A fragment of Euclid's *Elements* on part of the Oxyrhynchus papyri



ネットで見られるユークリッド:「幾何学原論」対訳　545ページ！

τετράπλευρα τραπέζια καλείσθω.

κγ΄. Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

which is right-angled but not equilateral, a rhombus that which is equilateral but not right-angled, and a rhomboid that having opposite sides and angles equal to one another which is neither right-angled nor equilateral. And let quadrilateral figures besides these be called trapezia.

23. Parallel lines are straight-lines which, being in the same plane, and being produced to infinity in each direction, meet with one another in neither (of these directions).

† This should really be counted as a postulate, rather than as part of a definition.

Αἰτήματα.

α΄. Ἠιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

β΄. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν.

γ΄. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.

δ΄. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.

ε΄. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

Postulates

1. Let it have been postulated† to draw a straight-line from any point to any point.

2. And to produce a finite straight-line continuously in a straight-line.

3. And to draw a circle with any center and radius.

4. And that all right-angles are equal to one another.

5. And that if a straight-line falling across two (other) straight-lines makes internal angles on the same side (of itself whose sum is) less than two right-angles, then the two (other) straight-lines, being produced to infinity, meet on that side (of the original straight-line) that the (sum of the internal angles) is less than two right-angles (and do not meet on the other side).‡

† The Greek present perfect tense indicates a past action with present significance. Hence, the 3rd-person present perfect imperative Ἠιτήσθω could be translated as "let it be postulated", in the sense "let it stand as postulated", but not "let the postulate be now brought forward". The literal translation "let it have been postulated" sounds awkward in English, but more accurately captures the meaning of the Greek.

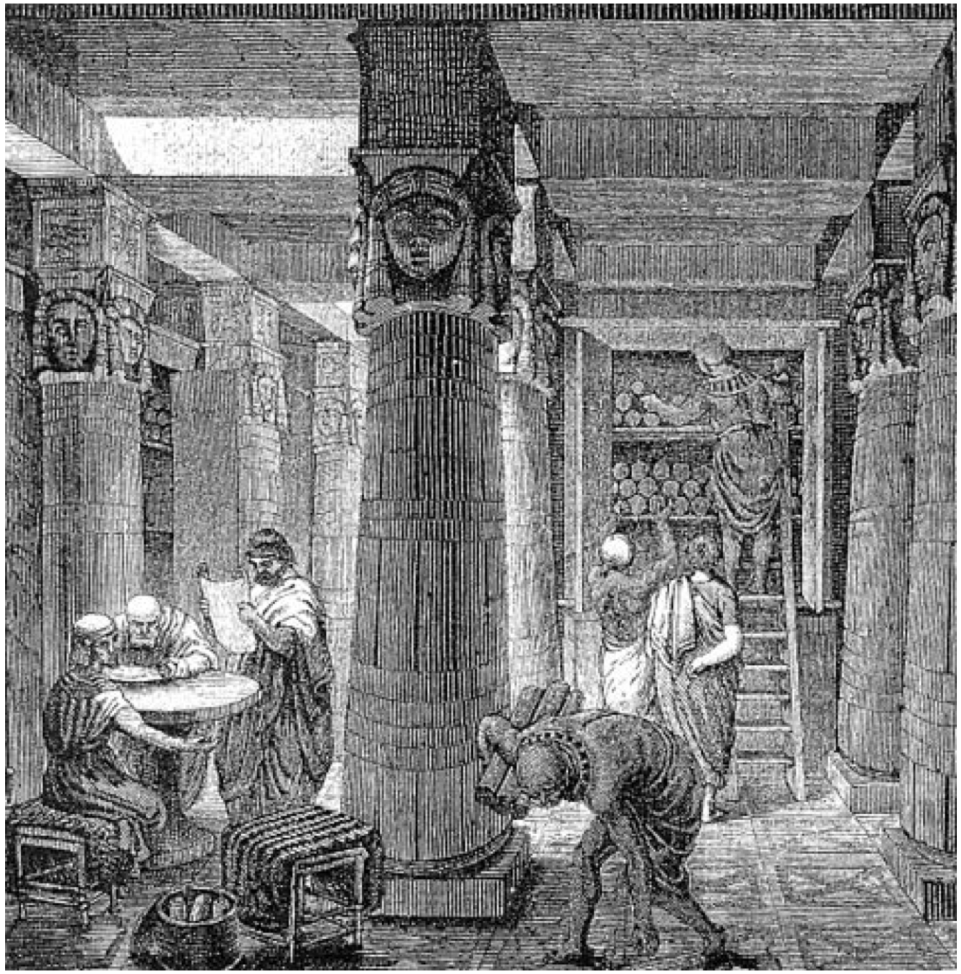
‡ This postulate effectively specifies that we are dealing with the geometry of *flat*, rather than curved, space.

http://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/Elements.pdf

著名な編者　アレキサンドリアのテオン

古代最大にして最高の図書館、
アレキサンドリア図書館の最後の館長がテオン（Theon of Alexandria 335-405）である。

アレクサンドリア図書館は。ローマ帝国の皇帝、テオドシウス1世が非キリスト教の宗教施設・神殿を破壊する許可を391年に与えたため、キリスト教の暴徒によって破壊された。

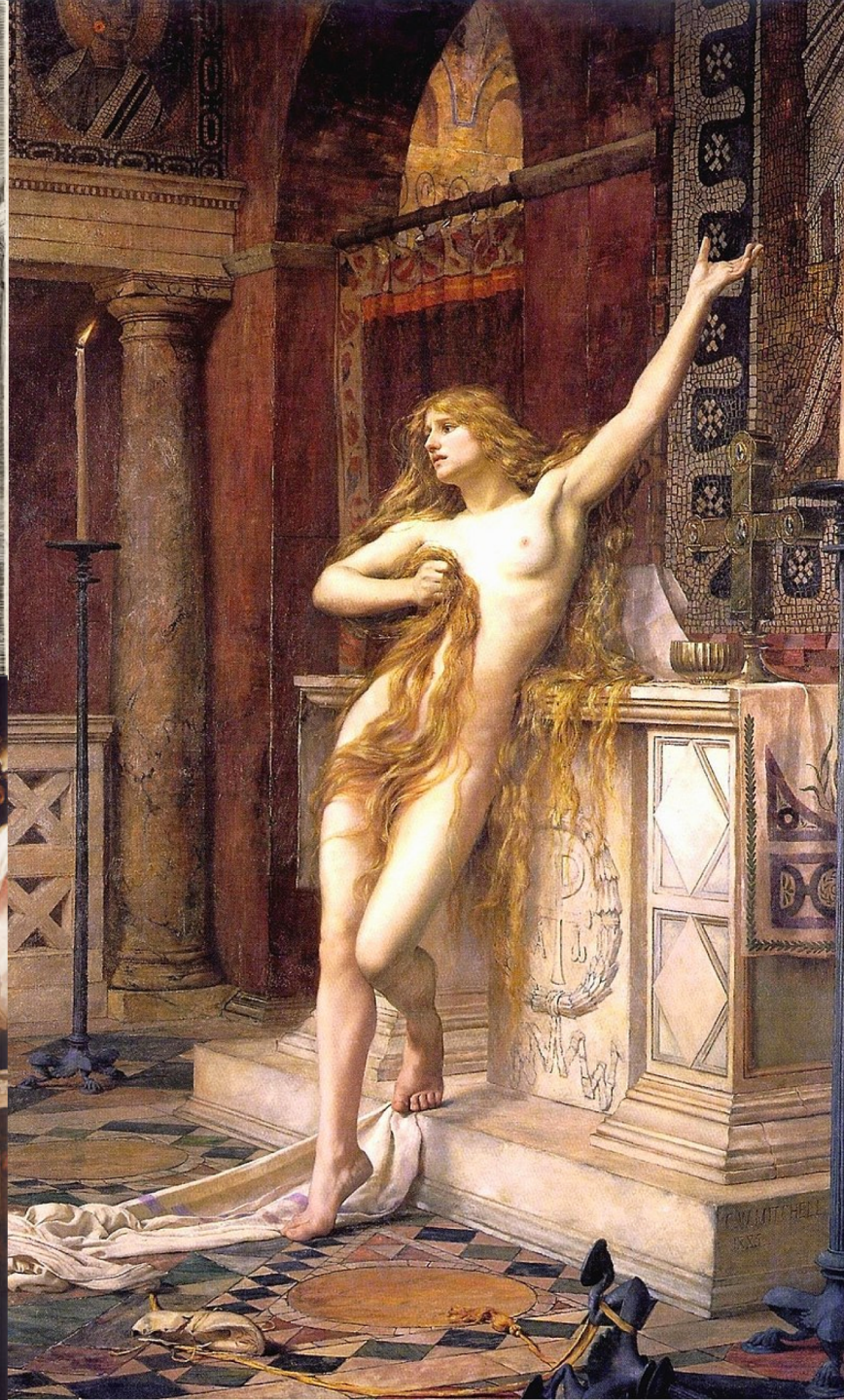


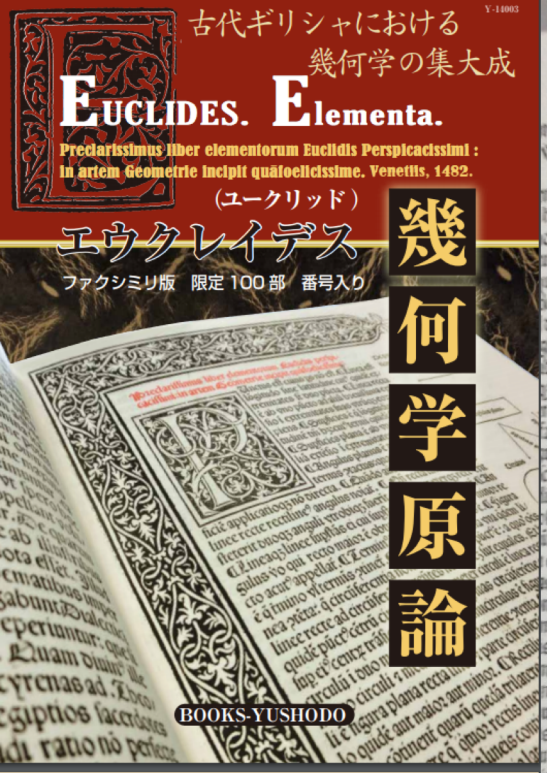


415年に、テオンの娘で、偉大な数学者であったヒュパティアは、総司教キュリロスによって、「教会を破壊するために生まれ育ってきた怪物である」として、虐殺された。

ここに、ピタゴラス以来のギリシャ数学の伝統は、途絶える。





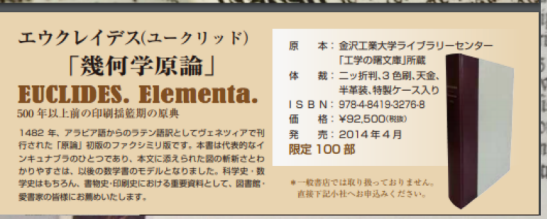


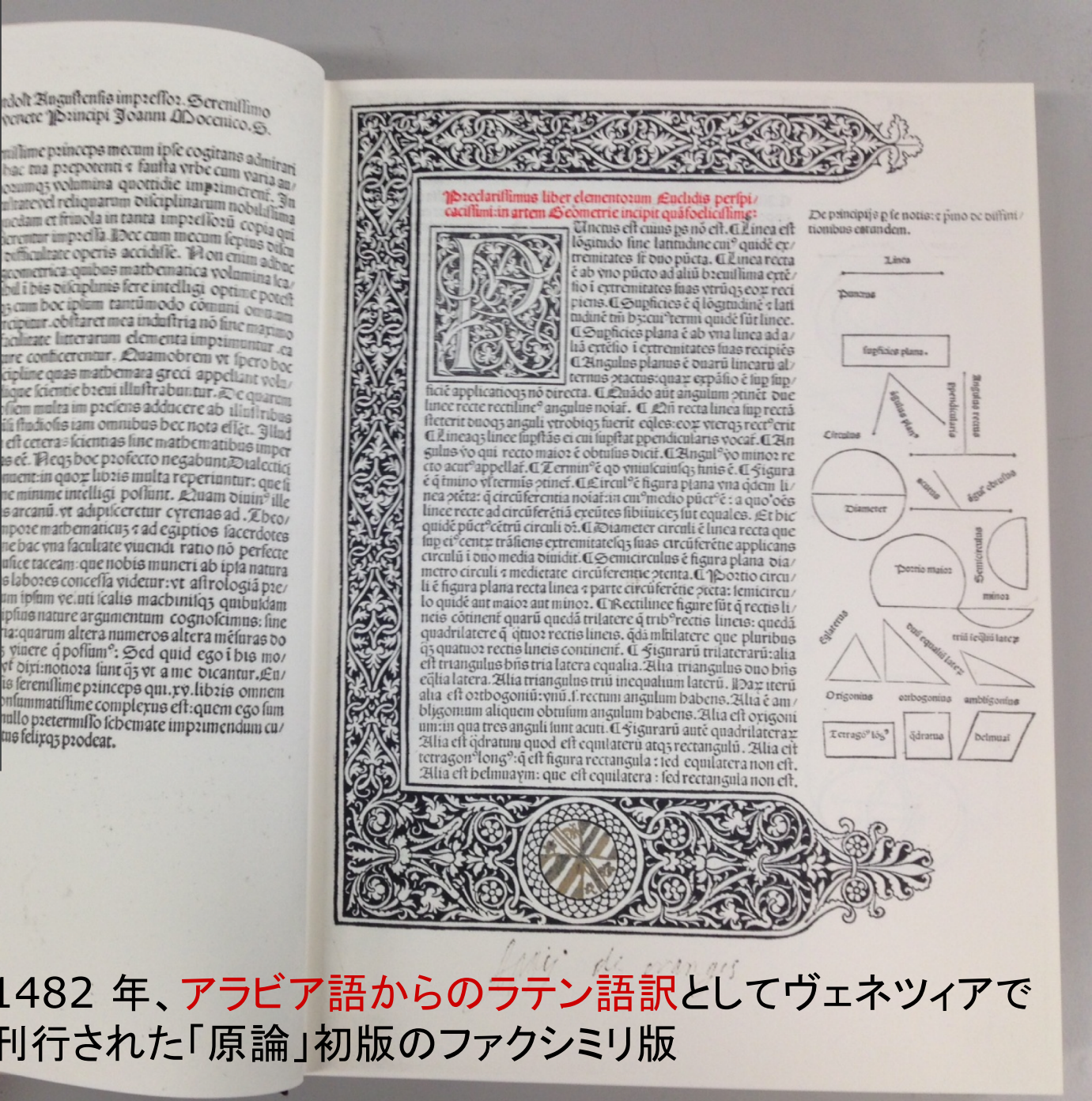
エウクレイデス(ユークリッド)
「幾何学原論」
EUCLIDES. Elementa.
500 年以上前の印刷揺籃期の原典

1482 年、アラビア語からのラテン語訳としてヴェネツィアで刊行された「原論」初版のファクシミリ版です。本書は代表的なインキュナブラのひとつであり、本文に添えられた図の斬新さとわかりやすさは、以後の数学書のモデルとなりました。科学史・数学史はもちろん、書物史・印刷史における重要資料として、図書館・愛書家の皆様にお薦めいたします。

原　本：金沢工業大学ライブラリーセンター「工学の扉文庫」所蔵
体　裁：ニッ折判、3 色刷、天金、半革装、特製ケース入り
ISBN：978-4-8419-3276-8
価　格：¥92,500(税抜)
発　売：2014 年 4 月
限定 100 部

＊一般書店では取り扱っておりません。直接下記小社へお申込みください。





1482 年、アラビア語からのラテン語訳としてヴェネツィアで刊行された「原論」初版のファクシミリ版

ユークリッド幾何学　定義

1　**点**とは、部分をもたないものである。
2　**線**とは、幅のない長さである。
3　線の端は点である。
4　**直線**とは、その上にある点について、一様に横たわる線である。
5　**面**とは、長さと幅のみをもつものである。
6　面の端は線である。
7　**平面**とは、その上にある直線について、一様に横たわる面である。

・・・・

13　**境界**とは、あるものの端である。

14　**図形**とは、1つまたは2つ以上の境界に囲まれたものである。**中心**と呼ばれる。

ユークリッド幾何学　定義

15　**円**とは、1つの線に囲まれた平面図形で、その図形の内部にある1点から、それへ引かれたすべての線分が互いに等しいものである。
16　この点は、円の**中心**と呼ばれる。
17　円の**直径**とは、円の中心を通り、両方向で円周によって限られた任意の線分であり、それはまた円を2等分する。
18　**半円**とは、直径とそれによって切りとられた弧とによって囲まれた図形である。半円の中心は、円のそれと同じである。

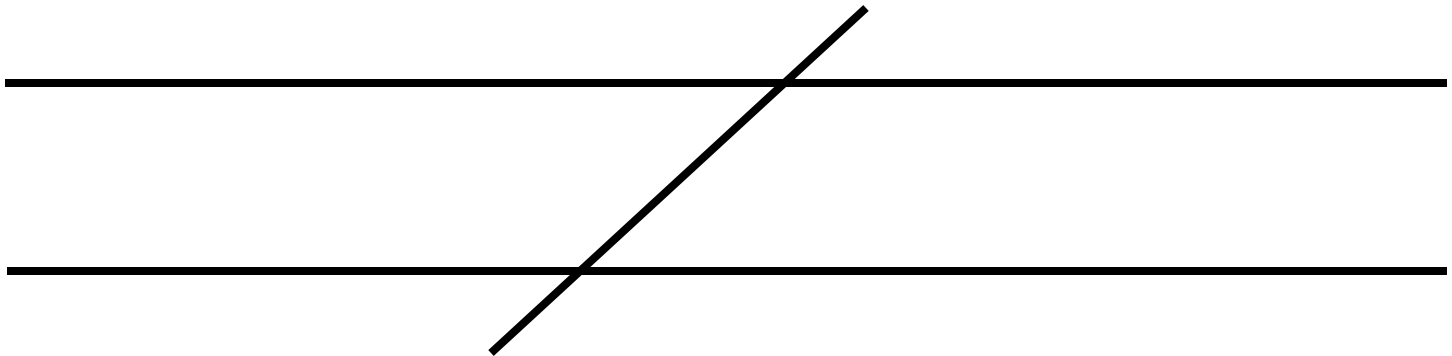
・・・・・

23　**平行線**とは、同一の平面上にあって、両方向に限りなく延長しても、いずれの方向においても互いに交わらない直線である。

ユークリッド幾何学　公準

つぎのことが要請されているとせよ。

1. 任意の一点から他の一点に対して直線を引くこと。
2. 有限の直線を連続的にまっすぐ延長すること。
3. 任意の中心と半径で円を描くこと。
4. すべての直角は互いに等しい。
5. 直線が**2**直線と交わるとき、同じ側の内角の和が2直角より小さい場合、その**2**直線が限りなく延長されたとき、内角の和が2直角より小さい側で交わる。



ユークリッド幾何学　公理

1 同じものに等しいものはまた互いに等しい。
2 また、等しいものに等しいものが加えられれば全体は等しい。
3 また、等しいものから等しいものが引かれれば残りは等しい。
〔4 また、不等なものに等しいものが加えられれば全体は不等である。
　5 また、同じものの2倍は互いに等しい。
6 また、同じものの半分は互いに等しい。〕
7 また、互いに重なり合うものは互いに等しい。
8 また、全体は部分より大きい。
〔9 また、2直線は面積を囲まない。〕

幾何学原論全13巻の内容

巻	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	Totals
定義	23	2	11	7	18	4	22	-	-	16	28	-	-	131
命題	48	14	37	16	25	33	39	27	36	115	39	18	18	465
公準	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5
共通概念	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5

「幾何学原論」の方法とその影響

ユークリッドの公理的アプローチと構成的方法は、数学のみならず、後世の哲学にも広い影響を与える。

- デカルトは、数学・幾何学の研究によって得られた概念は疑い得ない明証的なものであり、理性による真理であるとした。

1. 私が明証的に真理であると認めるものでなければ、いかなる事柄でもこれを真なりとして認めないこと
2. 検討しようとする難問をよりよく理解するために、多数の小部分に分割すること
3. もっとも単純なものからもっとも複雑なものの認識へと至り、先後のない事物の間に秩序を仮定すること
4. 最後に完全な列挙と、広範な再検討をすること

「幾何学原論」の方法とその影響

- ライプニッツは、「デカルトが明証という心理的なものを真理の基準としたことに反対し、すべての真理はアプリオリな分析命題であり、分析によって最終的には同一律に還元可能であると主張し、真理の基準を無矛盾性という論理的なものに置いた。」
- スピノザは、「代表作『エチカ』は、副題の「幾何学的秩序によって論証された」という形容が表しているように、なによりその中身が如実に示しているように、ユークリッドの『幾何原論』を髣髴とさせる定義・公理・定理・証明の一大体系である。それはまさにQ.E.D（「これが証明されるべき事柄であった」を示すラテン語の略）の壮大な羅列であり、哲学書としてこれ以上ないほど徹底した演繹を試みたものであった。

非ユークリッド幾何学の発見と リーマン幾何学

“geometry” という言葉は、文字どうりには、「地球を測る」という意味だ。ユークリッドは、地上の三角形を実際に測って見て困惑していたらしい。皮肉なことに、彼はユークリッド幾何学が成り立たないことを知っていたのかもしれない。理由は簡単である。地球の表面は、平面ではなく、球だからである。

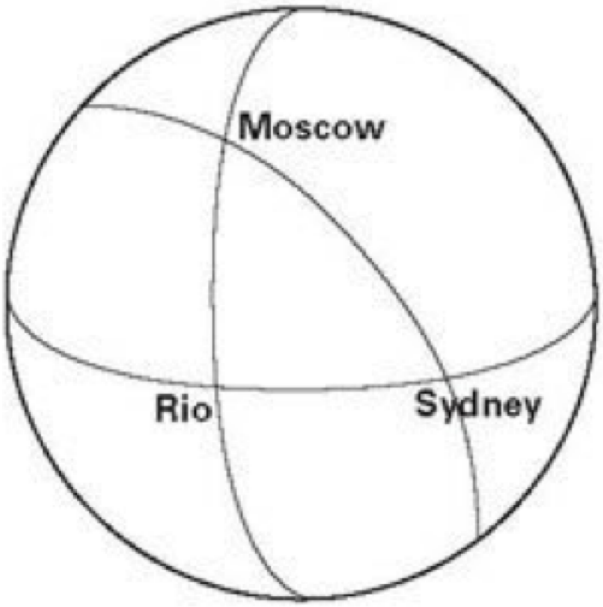
非ユークリッド幾何学の発見

- 19世紀の初め、非ユークリッド幾何学の創造での決定的なステップが起きる。1813年頃、Carl Friedrich Gaussと、また、1818年頃には、ドイツのFerdinand Karl Schweikartが、非ユークリッド幾何学のを研究したが、いずれも結果を公表しなかった。
- その後、1830年頃、ハンガリーの数学者János Bolyaiとロシアの数学者Nikolai Ivanovich Lobachevskyは双曲線幾何学に関する論文を別々に発表した。その結果、双曲線幾何学はBolyai-Lobachevskian幾何学と呼ばれる。ガウスはBolyaiの父親に若いBolyaiの研究が示されたときに、数年前にそのような幾何学を開発したと言ったが、彼はその結果を公表していなかった。

非ユークリッド幾何学の発見

- Lobachevskyは平行な仮定を否定することによって非ユークリッド幾何学を作成したが、Bolyaiはユークリッド幾何学と双曲幾何学の両方が、パラメータkに依存するような幾何学を作り出した。Bolyaiは物理宇宙の幾何学的構造がユークリッド的または非ユークリッド的であるとしても、それを数学的推論だけで決めることは不可能であるとして、それは物理学の課題だと述べて、彼の研究を終える。

https://en.wikipedia.org/wiki/Non-Euclidean_geometry



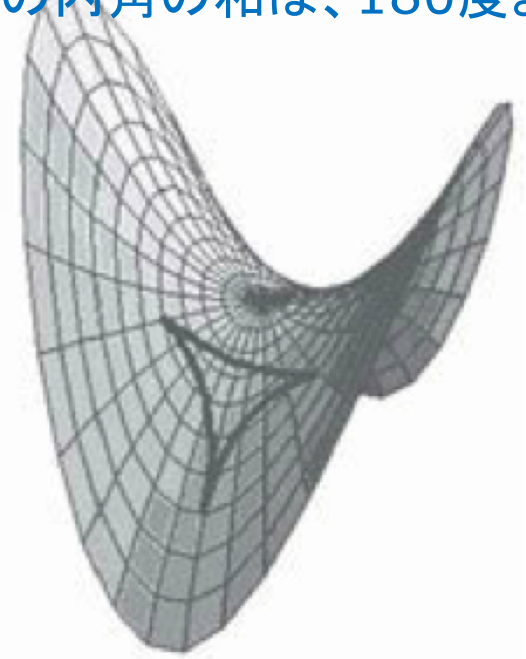


三角形の内角の和は、180度より大きい

楕円幾何学

三角形の内角の和は、180度より小さい

双曲幾何学



リーマン幾何学

リーマンが考えたこと



"On the Hypotheses which lie at the Bases of Geometry"

http://www.emis.de/classics/Riemann/WKCGeom.pdf

リーマン
「幾何学の基礎をなす仮説について」

- 「周知のように幾何学は、空間の概念も、空間のなかでの幾何学的構成のための最初の基礎概念をも、何か与えられたものとして前提しています。幾何学はそれらに名目的定義を与えているだけであって、本質的な諸規定は公理の形式で現れています。だがその際、それら前提の関係は不明のままであって、それらの結合がはたして必然的であるのか、そしてどの程度まで必然的なのか、わからないし、またそれが 可能であるかどうかも、アプリオリにはわかりません」
- 幾何学が扱う事実は、「すべての事実と同じく、必然的ではなく、経験的に確実であるにすぎず、それらは仮説」である

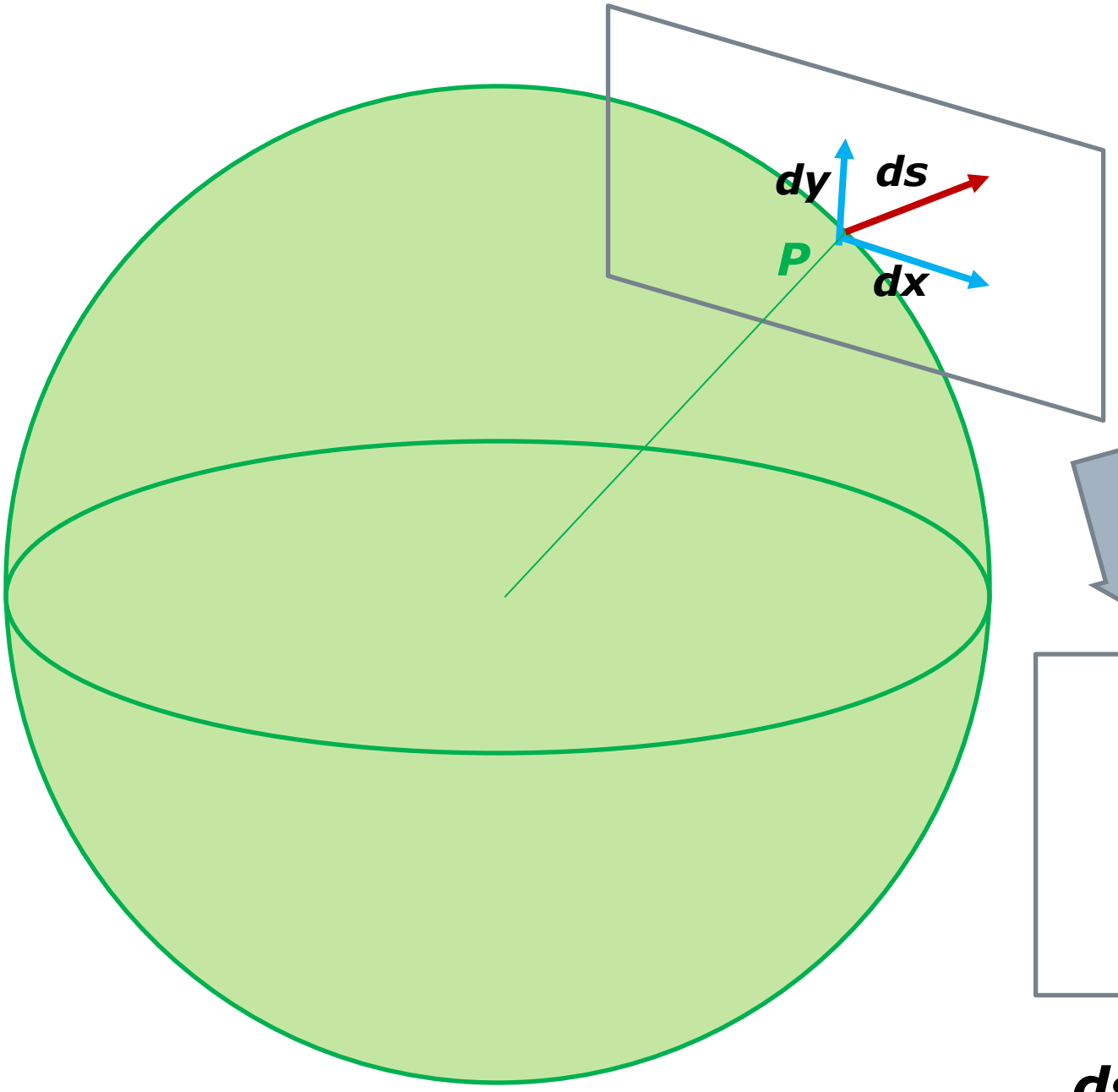
リーマン
「幾何学の基礎をなす仮説について」

- 「量の概念は、種々の規定の仕方を許すこと のできる普遍概念が存在する場合にのみ、可能であります。これらの規定の仕方の間で、ある仕方から他の仕方への連続的な移行があるか否かに応じて、それらは連続的多様体か、または離散的多様体となるのです。個々の規定の仕方を前者の場合には多様体の点、後者の場合にはそれの要素と呼ぶことにします」
- 「この場合の量についてなされる研究は、量論のなかで、計量規定とは無関係な一般的な部分をなすのであり、そこでは量は位置に無関係に存在するものとしてではなく、また単位によって表しうるものとしてでもなく、多様体のなかの領域として考察されます」

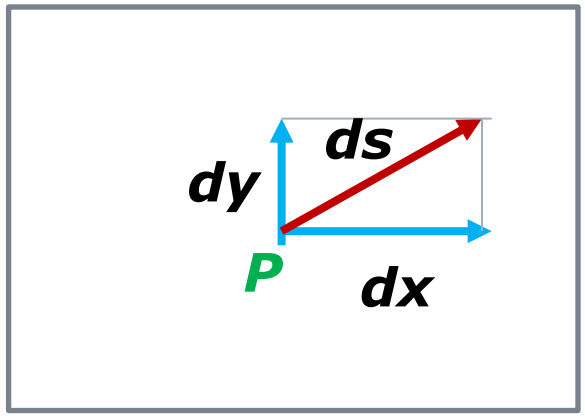
リーマンが考えたこと (1)
多様体

- 様々な曲面がある。
  その中で、曲面上の一点Pに接する平面T_pをとって、その平面をどんどん小さくしたとき、その平面を、普通のユークリッド空間とみなせるとき、その曲面を「多様体」と呼ぶ。
- 多様体M上の点Pのごく近くの性質は、ごく狭い範囲では、点Pの接平面上の性質と同一視できる。
- 多様体M上の、非常に近い二点P, Qが与えられたとき、Pの接平面T_pとQの接平面T_Qとの間の関係を記述できる。

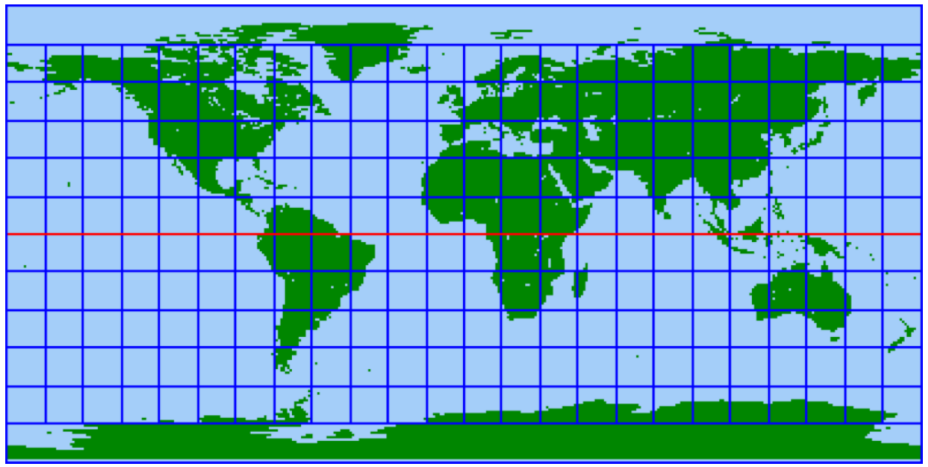
多様体は、局所的には、ユークリッド空間の構造が入っていると見なせる。



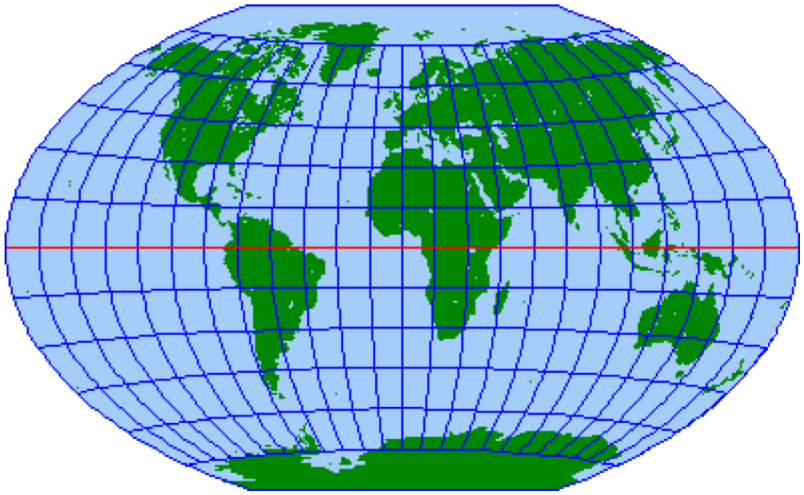
球面上の点Pで
球に接する平面を
考える。その平面
が、ごく小さなもの
だとすれば、平面
上の線分の長さは、
ピタゴラスの定理で
求められる。



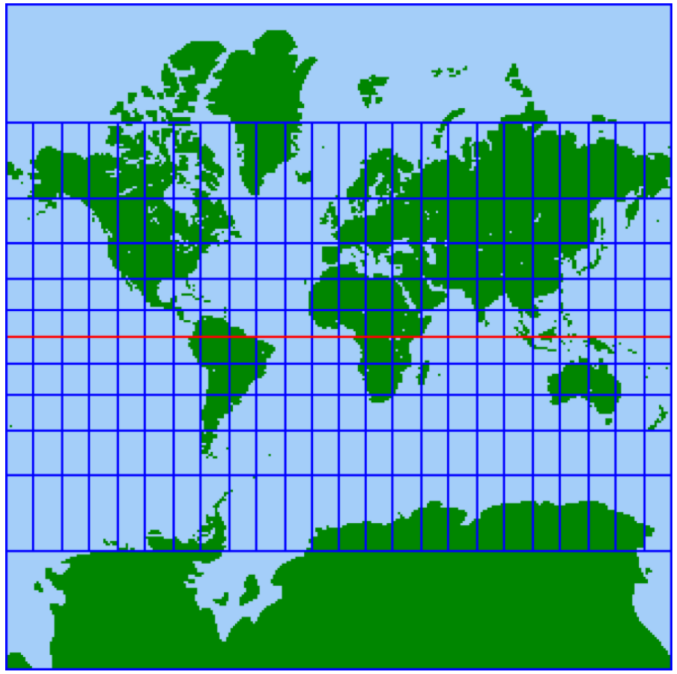
$$ds^2=dx^2+dy^2$$



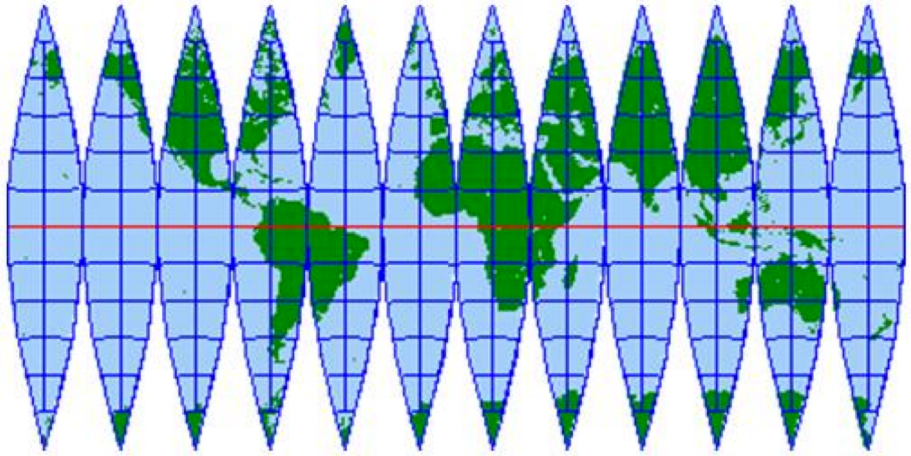
円筒図法



ヴィンケル図法

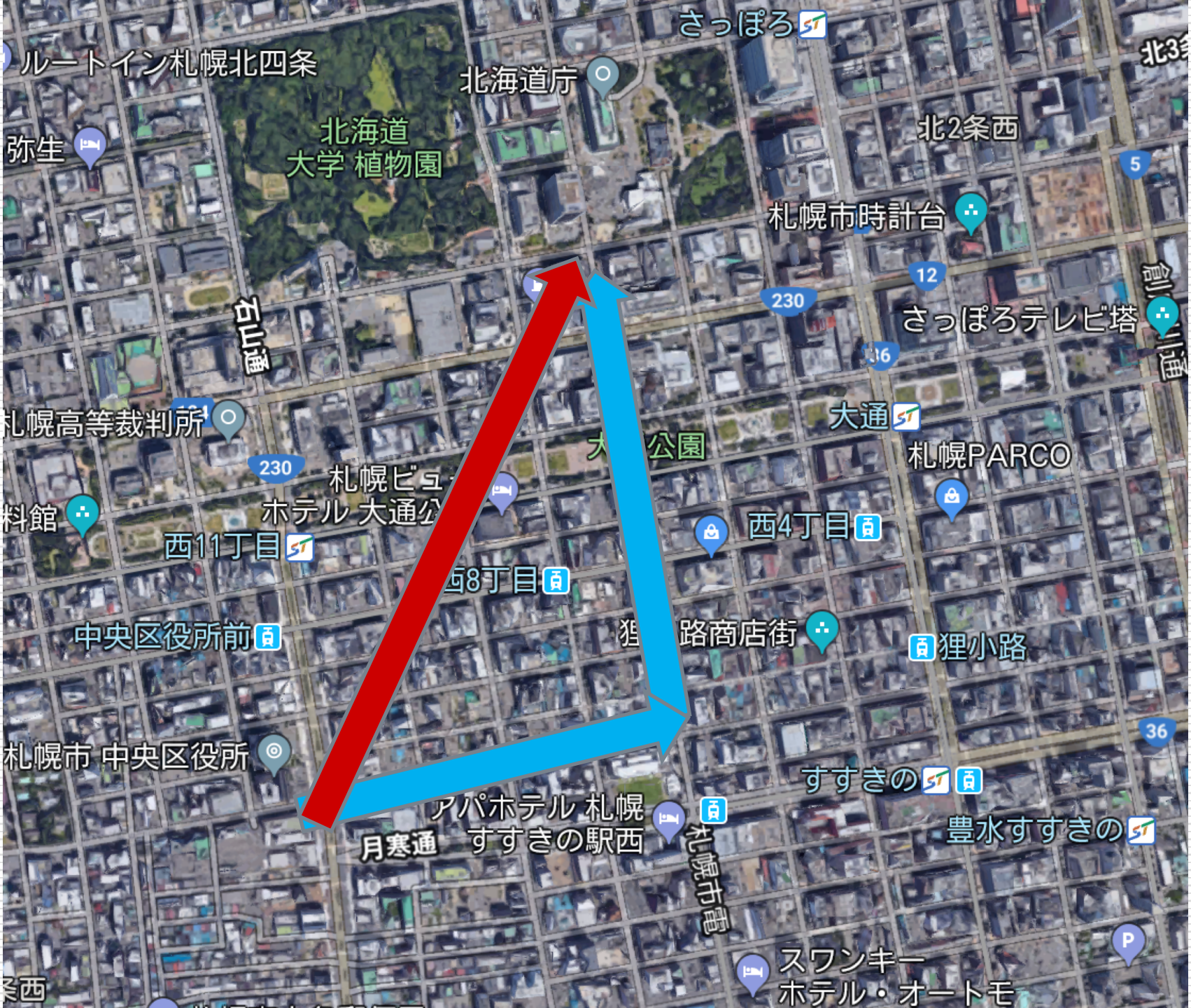


メルカトール図法



舟型多円錐図法

http://atlas.cdx.jp/projection/catalog.htm


さっぽろ
ルートイン札幌北四条
北海道庁
北海道
大学 植物園
弥生
北2条西
札幌市時計台
さっぽろテレビ塔
札幌高等裁判所
大通
公園
札幌PARCO
札幌ビュ
ホテル 大通公
西11丁目
西4丁目
西8丁目
中央区役所前
路商店街
狸小路
札幌市 中央区役所
すすきの
豊水すすきの
アパホテル 札幌
すすきの駅西
月寒通
スワンキー
ホテル・オートモ
230
12
5
36

リーマンが考えたこと (2)
計量

- 多様体M上の各点Pに、そのPの近傍で「長さ」を定義する関数g(P)を与える。それを「計量」と呼ぶ。計量は、接平面上の微少量の「二次形式」で与えられる。
- 計量は、多様体M上の全ての点で同一でもいいし、各点で異なっていても構わない。重要なことは、多様体M上の全ての点は、計量を持つということである。

多様体は、全ての点に、長さを測る「物差し」が備わっている。

$ds^2=dx^2+dy^2$ の一般化

次元の拡張(ピタゴラスの定理の拡張)

2次元：$dS^2=(dX^1)^2+(dX^2)^2$

3次元：$dS^2=(dX^1)^2+(dX^2)^2+(dX^3)^2$

4次元：$dS^2=(dX^1)^2+(dX^2)^2+(dX^3)^2+(dX^4)^2$

n次元：$dS^2=(dX^1)^2+(dX^2)^2+(dX^3)^2+(dX^4)^2+\cdots+(dX^n)^2$

$(dX^1)^2=dX^1\cdot dX^1$ である。

$dS^2=(dX^1)^2+dX^1\cdot dX^2+(dX^2)^2$ とか、

$dS^2=(dX^1)^2+2dX^1\,dX^2+3(dX^2)^2$ とかで、dS^2があたえられてもいい。

計量テンソル g

項 $dX^m\,dX^n$ の係数を$g_{mn}(X)$とすれば、一般に

$$dS^2 = \sum g_{mn}(X)\,dX^m\,dX^n$$

と書ける。以下では、総和記号を省略して（アインシュタインの記法） $\boldsymbol{dS^2 = g_{mn}(X)\,dX^m\,dX^n}$ と表すことにする。

$g_{mn}(X)$の要素を、m行n列の行列で表したものを、計量テンソル（点Xでの）と呼ぶ。

二次元のユークリッド平面の計量テンソルは、単位行列になる。

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2$$

全ての点で同一の計量が与えられ（gがXを含んでいない）、長さは、ピタゴラスの定理で与えられる。

四次元の計量の例

一般には、次のような形をしている。なかなか複雑である。

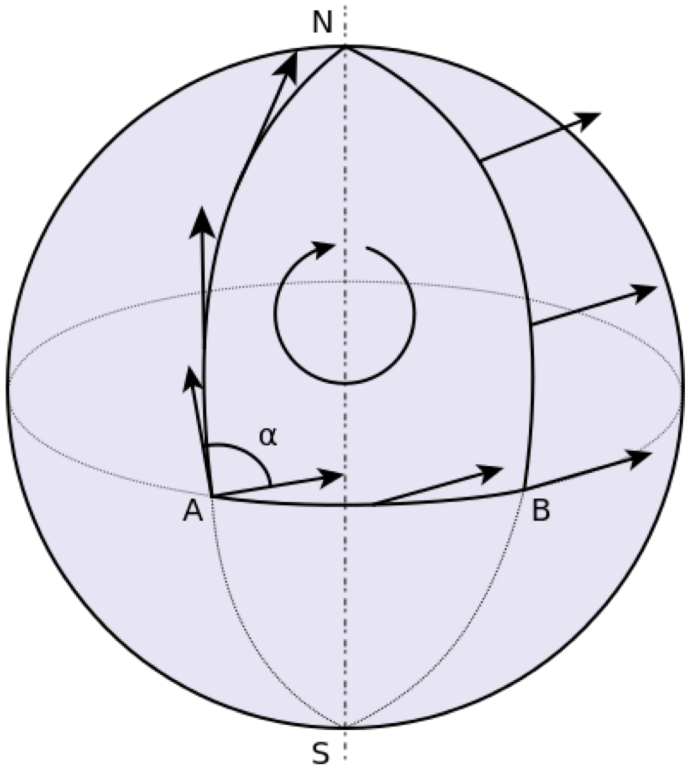
$$g_{mn} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} & g_{34} \\ g_{14} & g_{24} & g_{34} & g_{44} \end{pmatrix}$$

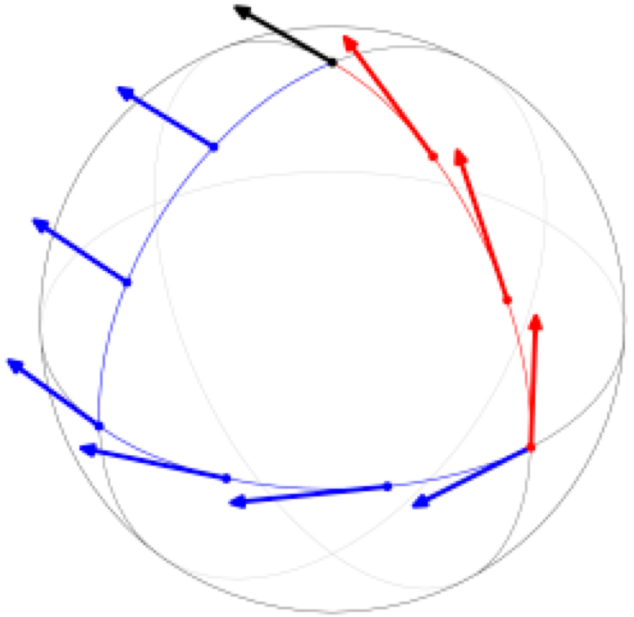
四次元へのピタゴラスの定理の拡張の場合の計量

$$g_{mn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$dS^2 = (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (dX^3)^2 + (dX^4)^2$$

平行移動 （線分の長さを変えない移動）





このズレが曲面の「曲率」を表す

リーマンの研究プラン

"On the Hypotheses which lie at the Bases of Geometry"

http://www.emis.de/classics/Riemann/WKCGeom.pdf

Plan of the Inquiry:
I. Notion of an n-ply extended magnitude.

1. **Continuous and discrete manifoldnesses**. Defined parts of a manifoldness are called **Quanta**. Division of the theory of continuous magnitude into the theories,
   1. Of mere region-relations, in which an independence of magnitudes from position is not assumed; トポロジカル
   2. Of size-relations, in which such an independence must be assumed. 量の大きさが問題となる
2. Construction of the notion of a one-fold, two-fold, n-fold extended magnitude. 長さ、面積、体積、角度
3. Reduction of place-fixing in a given manifoldness to quantity fixings. True character of an n-fold extended magnitude.

II. … lines have a length independent of position

II. Measure-relations of which a manifoldness of n-dimensions is capable on the assumption that **lines have a length independent of position**, and consequently that every line may be measured by every other.

直線が位置とは独立に長さを持つ

1. Expression for the line-element. Manifoldnesses to be called Flat in which the line-element is expressible as the square root of a sum of squares of complete differentials.

   多様体がフラット「平坦」である条件

2. Investigation of the manifoldness of n-dimensions in which the line element may be represented as the square root of a quadric differential.

線分が、微分の二次形式の平方で与えられる多様体

II. … lines have a length independent of position

平坦さからのズレの測度としての曲率

Measure of its deviation from flatness (curvature) at a given point in a given surface-direction. For the determination of its measure-relations it is allowable and sufficient that the curvature be arbitrarily given at every point in ½ n(n − 1) surface directions.

3. Geometric illustration.
4. Flat manifoldnesses (in which the curvature is everywhere = 0) may be treated as a special case of manifoldnesses with constant curvature. These can also be defined as admitting an independence of n-fold extents in them from position (possibility of motion without stretching).
5. Surfaces with constant curvature.

III. Application to Space.

1. System of facts which suffice to determine the measure-relations of space assumed in geometry.
2. How far is the validity of these empirical determinations probable beyond the limits of observation towards the infinitely great?
3. How far towards the infinitely small? Connection of this question with the interpretation of nature.

リーマンらが行なった計算

Susskind “General Relativity”
Lecture Note: https://goo.gl/jFbMdr
Youtube: https://goo.gl/LW5oz8

EMANの物理学　相対性理論: https://goo.gl/v3vaRr

共変微分とクリストッフェル記号

$$D_r V_m = \partial_r V_m - \Gamma^t_{rm}\ V_t$$

共変微分　　クリストッフェル記号

二階のテンソルの微分

$$D_r T_{mn} = \partial_r T_{mn} - \Gamma^t_{rm} T_{tn} - \Gamma^t_{rn} T_{mt}$$

計量テンソルの微分

$$D_r g_{mn} = \partial_r g_{mn} - \Gamma^t_{rm} g_{tn} - \Gamma^t_{rn} g_{mt}$$

計量テンソルの微分＝0から、

$$\partial_r g_{mn} - \Gamma^t_{rm} g_{tn} - \Gamma^t_{rn} g_{mt} = 0$$

クリストッフェル記号を計量で表す

$$\partial_r g_{mn} - \Gamma^t_{rm} g_{tn} - \Gamma^t_{rn} g_{mt} = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\partial_m g_{rn} - \Gamma^t_{rm} g_{tn} - \Gamma^t_{mn} g_{rt} = 0 \qquad \text{(b)}$$

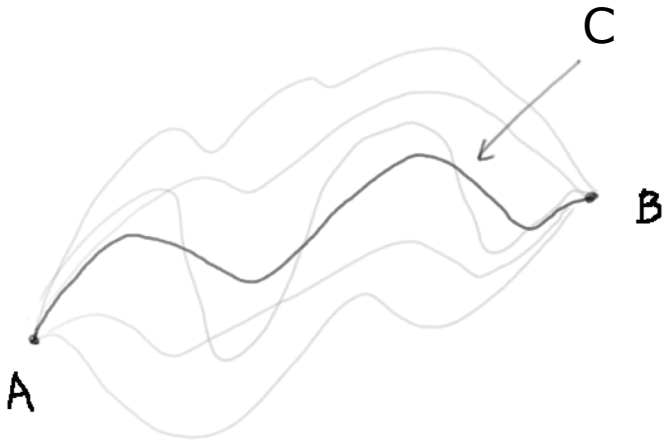
$$\partial_n g_{rm} - \Gamma^t_{rn} g_{tm} - \Gamma^t_{mn} g_{rt} = 0 \qquad \text{(c)}$$

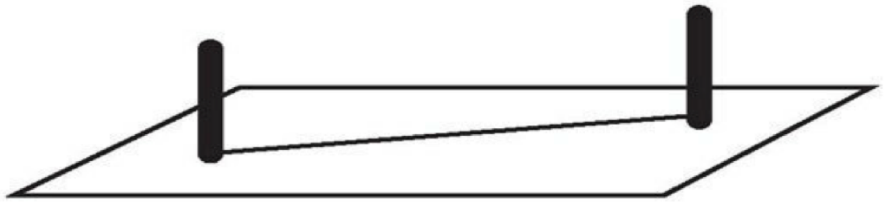
(b) + (c) − (a) yields

$$\partial_n g_{rm} + \partial_m g_{rn} - \partial_r g_{mn} = 2\Gamma^t_{mn} g_{rt}$$

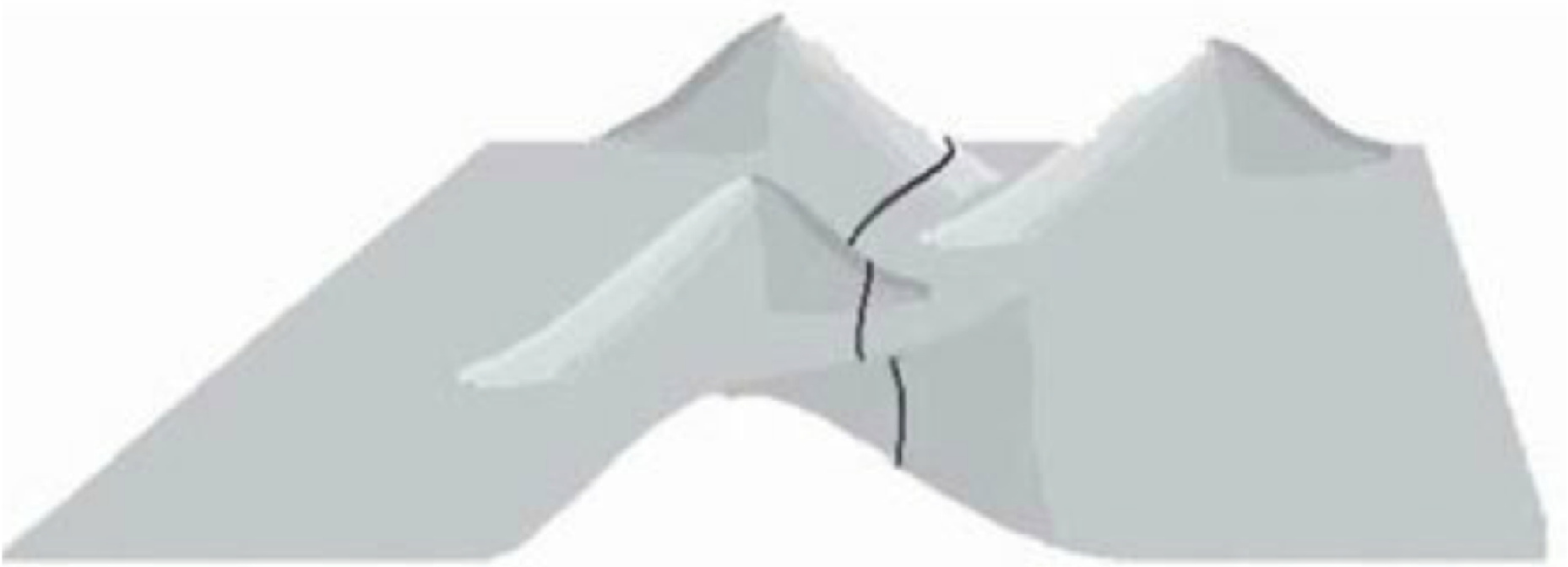
$$\Gamma^t_{mn} = \frac{1}{2}\, g^{rt} \left[\, \partial_n g_{rm} + \partial_m g_{rn} - \partial_r g_{mn} \,\right]$$

測地線　AとBを結ぶ最短の曲線





平坦な空間なら
直線になる。



「長さ」と測地線の方程式

$$dS^2 = g_{mn}(X)\ dX^m\ dX^n$$

$$dS = \sqrt{g_{mn}(X)\ dX^m\ dX^n}$$

$$S = \int_{along\ curve\ C} \sqrt{g_{mn}(X)\ dX^m\ dX^n}$$

$$\frac{d^2 x^\lambda}{dt^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0,$$

リーマン曲率テンソルとリッチテンソルと曲率

リーマン曲率テンソル

$$\mathcal{R}^{\ t}_{srn} = \partial_r \Gamma^t_{sn} - \partial_s \Gamma^t_{rn} + \Gamma^p_{sn}\Gamma^t_{pr} - \Gamma^p_{rn}\Gamma^t_{ps}$$

リッチテンソル

$$R_{ij} = R^n_{i,nj}$$

$$R_{ij} = \frac{\partial \Gamma^n_{ij}}{\partial x^n} - \frac{\partial \Gamma^n_{in}}{\partial x^j} + \Gamma^m_{ij}\Gamma^n_{mn} - \Gamma^m_{in}\Gamma^n_{mj}$$

スカラー曲率

$$R = g^{ij} R_{ij}$$

アインシュタインの方程式

$$\mathcal{R}^{t}_{srn} = \partial_r \Gamma^{t}_{sn} - \partial_s \Gamma^{t}_{rn} + \Gamma^{p}_{sn}\Gamma^{t}_{pr} - \Gamma^{p}_{rn}\Gamma^{t}_{ps}$$

$$G^{\mu\nu} = \mathcal{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu}\, \mathcal{R}$$

$$\mathcal{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu}\, \mathcal{R} = 8\pi G\, T^{\mu\nu}$$

共変微分が、テンソルの変換則を満たしていることの検証

$$
\begin{aligned}
\nabla'_j a'_i &= \frac{\partial a'_i}{\partial x'^j} - \Gamma'^{t}_{ij} a'_t \\
&= \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^k}{\partial x'^j}\frac{\partial a^l}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^i \partial x'^j} a_l - \left(\frac{\partial x'^t}{\partial x^p}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\Gamma^{p}_{lm} + \frac{\partial x'^t}{\partial x^r}\frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^i \partial x'^j} \right)\frac{\partial x^q}{\partial x'^t} a_q \\
&= \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^k}{\partial x'^j}\frac{\partial a^l}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^i \partial x'^j} a_l - \frac{\partial x^q}{\partial x^p}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\Gamma^{p}_{lm} a_q - \frac{\partial x^q}{\partial x^r}\frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^i \partial x'^j} a_q \\
&= \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^k}{\partial x'^j}\frac{\partial a^l}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^i \partial x'^j} a_l - \frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\Gamma^{p}_{lm} a_p - \frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^i \partial x'^j} a_r \\
&= \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^k}{\partial x'^j}\frac{\partial a^l}{\partial x^k} - \frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\Gamma^{p}_{lm} a_p \\
&= \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^k}{\partial x'^j}\left(\frac{\partial a^l}{\partial x^k} - \Gamma^{p}_{lk} a_p \right) \\
&= \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^k}{\partial x'^j}\nabla_k a_l
\end{aligned}
$$

http://eman-physics.net/relativity/co_dif.html

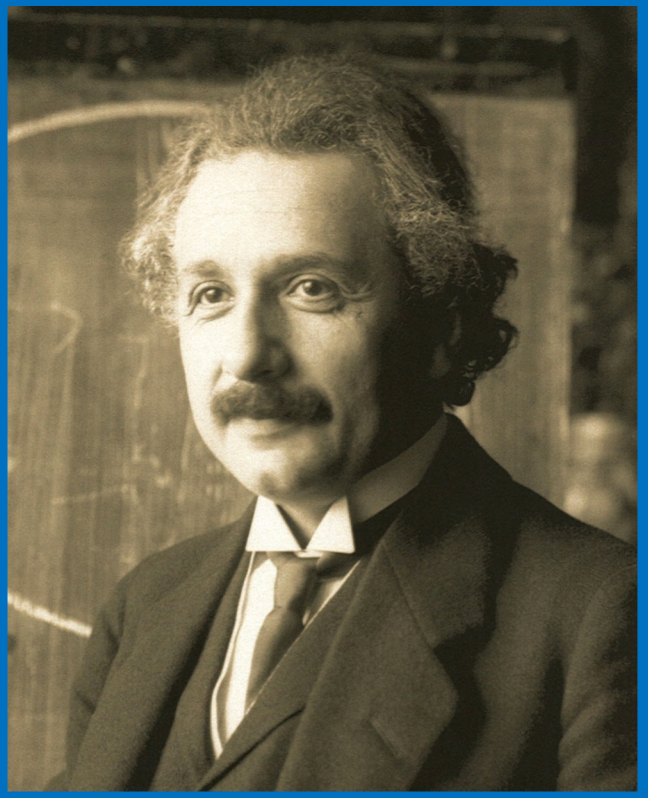
$$A^j{}_{//}(x+\mathrm{d}x) = A^j(x) - \Gamma^j{}_{km} A^m(x)\,\mathrm{d}x^k$$ の証明

$$
\begin{aligned}
&= A^j + \left(g^{ij}\Gamma^l{}_{ik} A_l + \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} A_i \right) \mathrm{d}x^k \\
&= A^j + \left(g^{lj}\Gamma^i{}_{lk} + \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} \right) A_i\,\mathrm{d}x^k \\
&= A^j + \left[g^{lj}\frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^m} \right) - g^{im} g^{lj} \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} \right] A_i\,\mathrm{d}x^k \\
&= A^j + \left[g^{lj}\frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^m} \right) \right] A_i\,\mathrm{d}x^k \\
&= A^j + \left[\frac{1}{2} g^{lj} \left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^m} \right) \right] A_m\,\mathrm{d}x^k \\
&= A^j - \left[\frac{1}{2} g^{lj} \left(\frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{km}}{\partial x^l} \right) \right] A_m\,\mathrm{d}x^k \\
&= A^j - \Gamma^j{}_{km} A^m\,\mathrm{d}x^k
\end{aligned}
$$

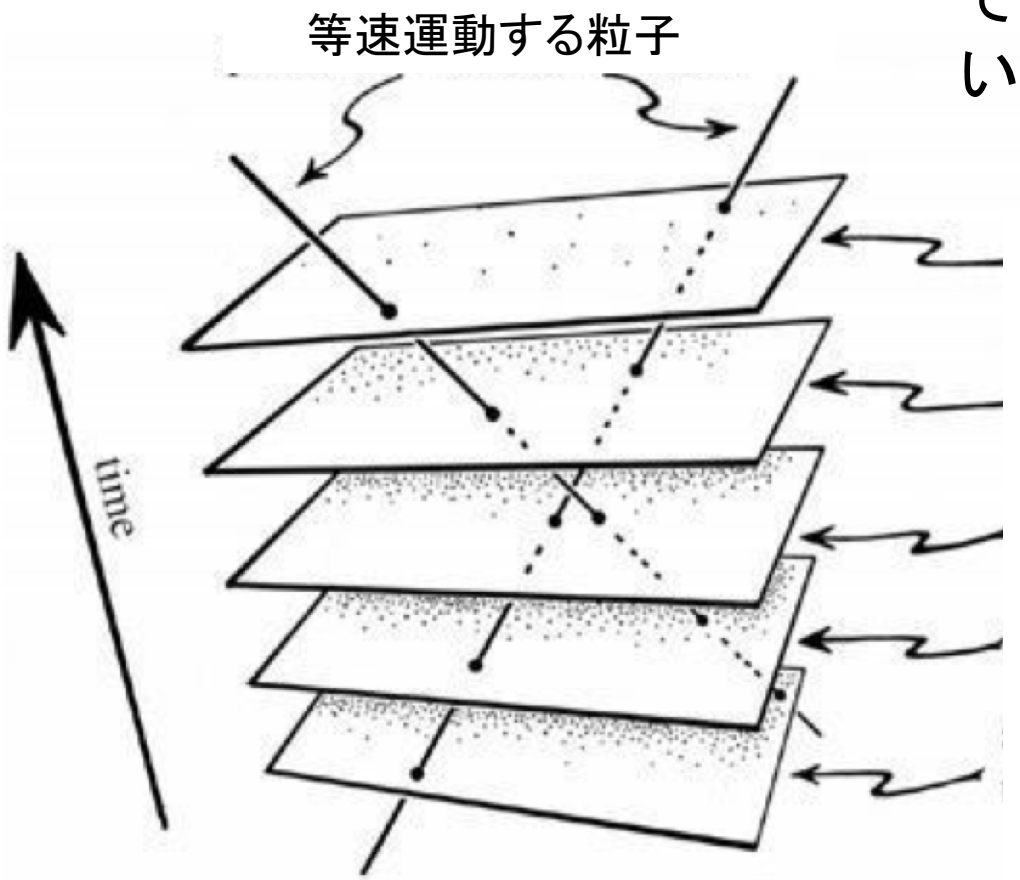
http://eman-physics.net/relativity/parallel.html

ミンコフスキーとアインシュタイン





空間は、「同時刻の空間」で、平行にスライスされている。



あさって、正午の空間

明日、正午の空間

今日、正午の空間

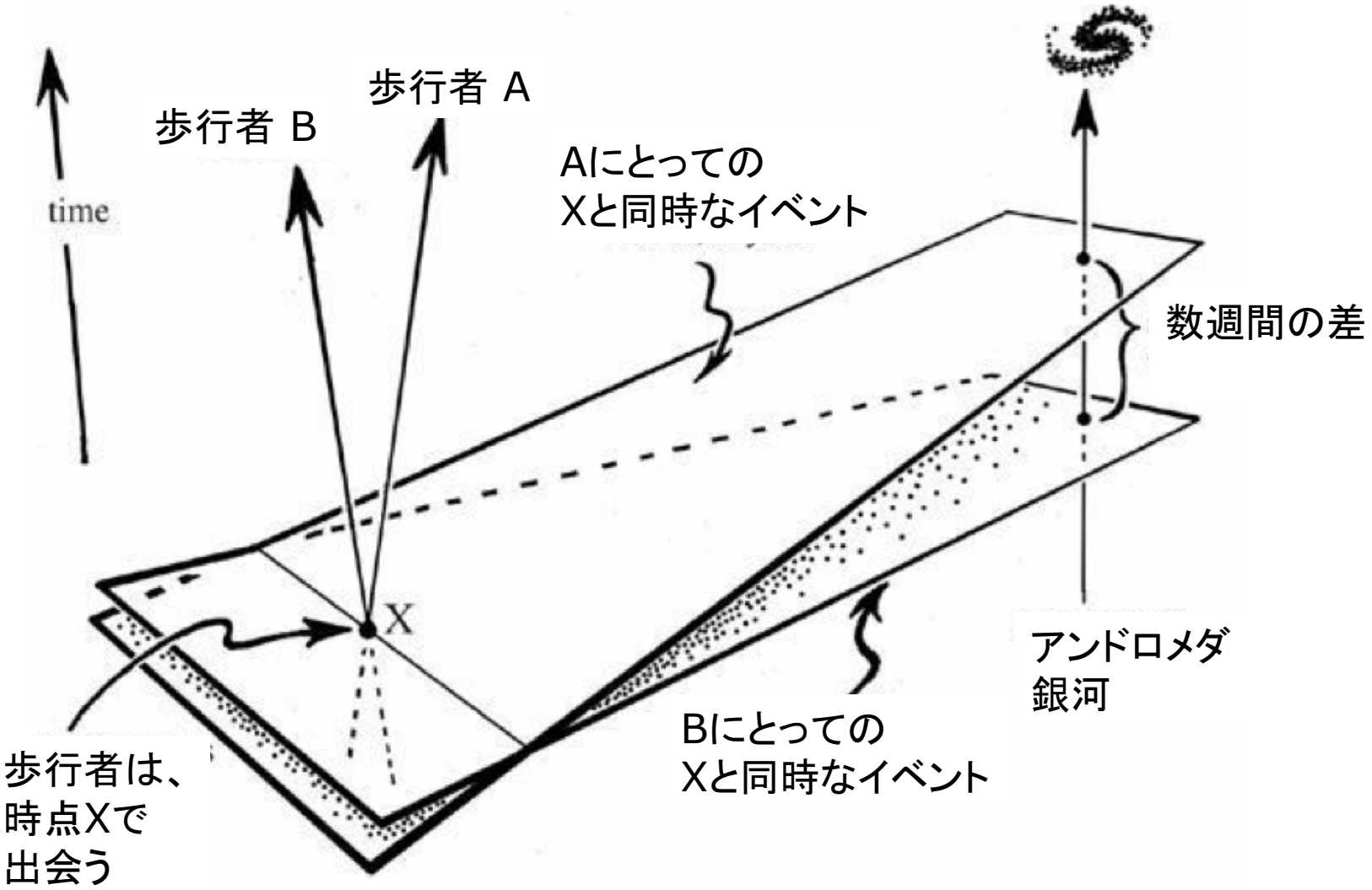
昨日、正午の空間

一昨日、正午の空間

ミンコフスキー以前の時空像

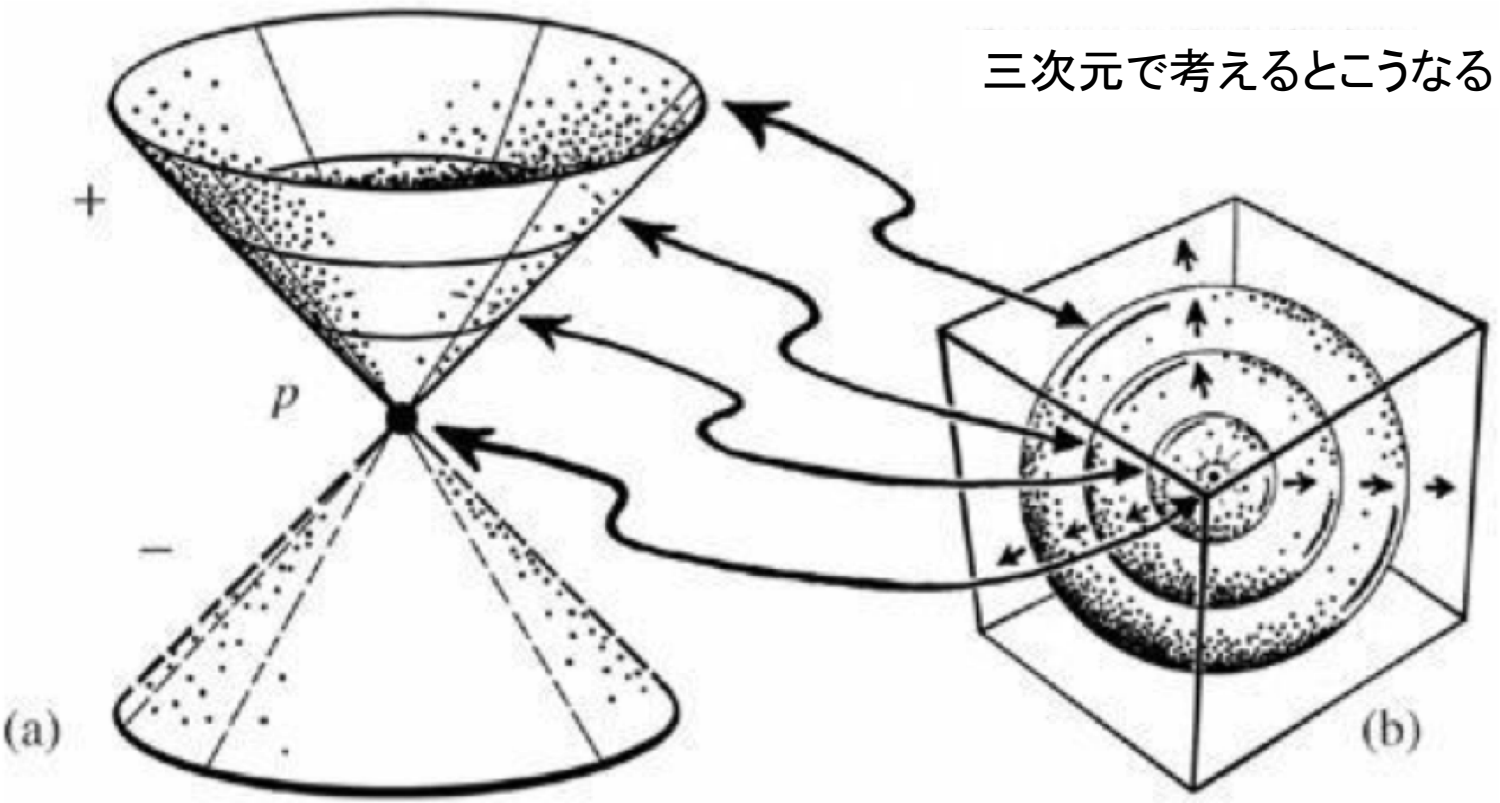
Penrose “Cycle of Time” https://goo.gl/RBYi5T

歩行者のスピードによって、「同時刻の空間」は、ことなる。



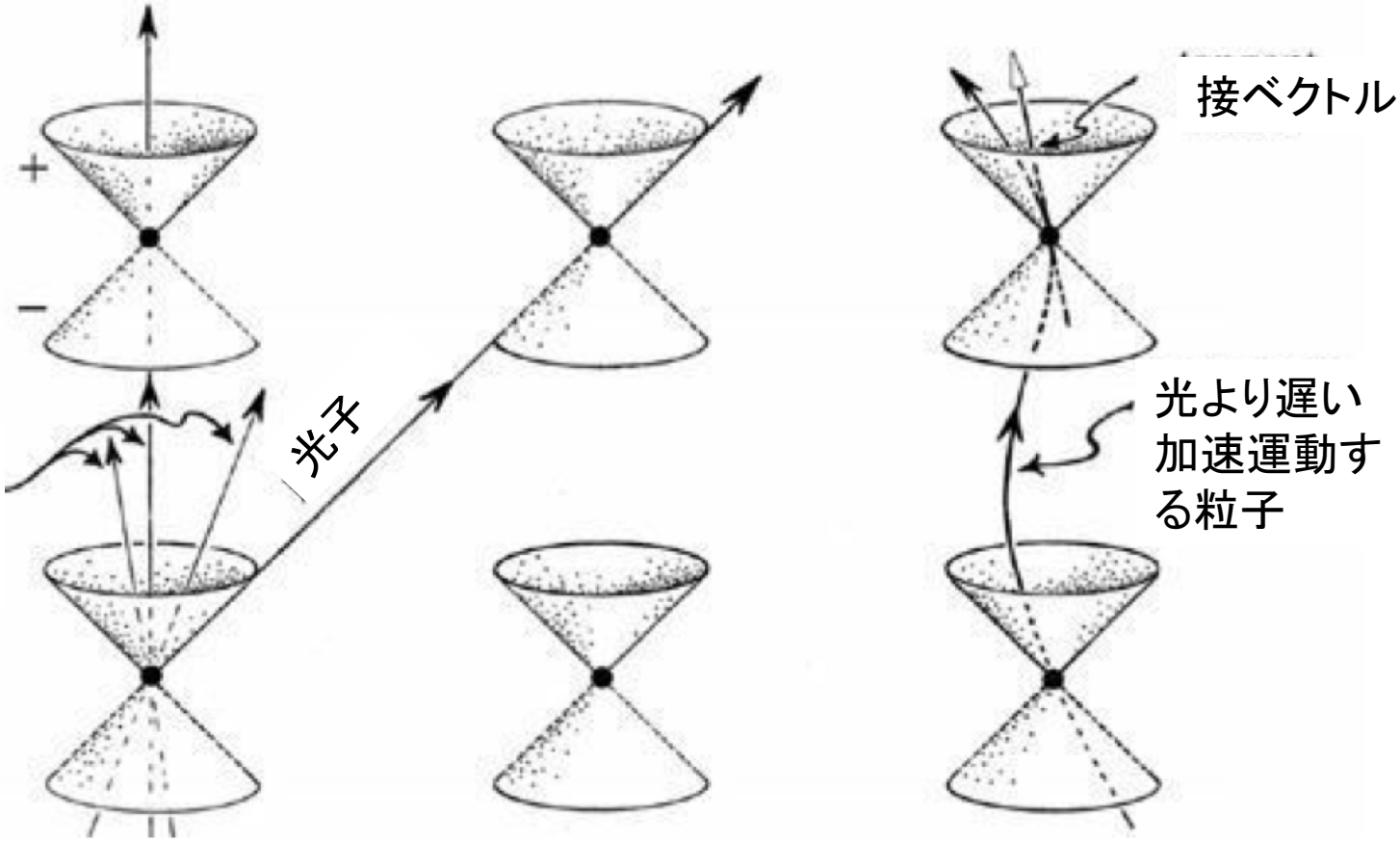
ミンコフスキー空間で二人の歩行者が出会う

Penrose “Cycle of Time” https://goo.gl/RBYi5T



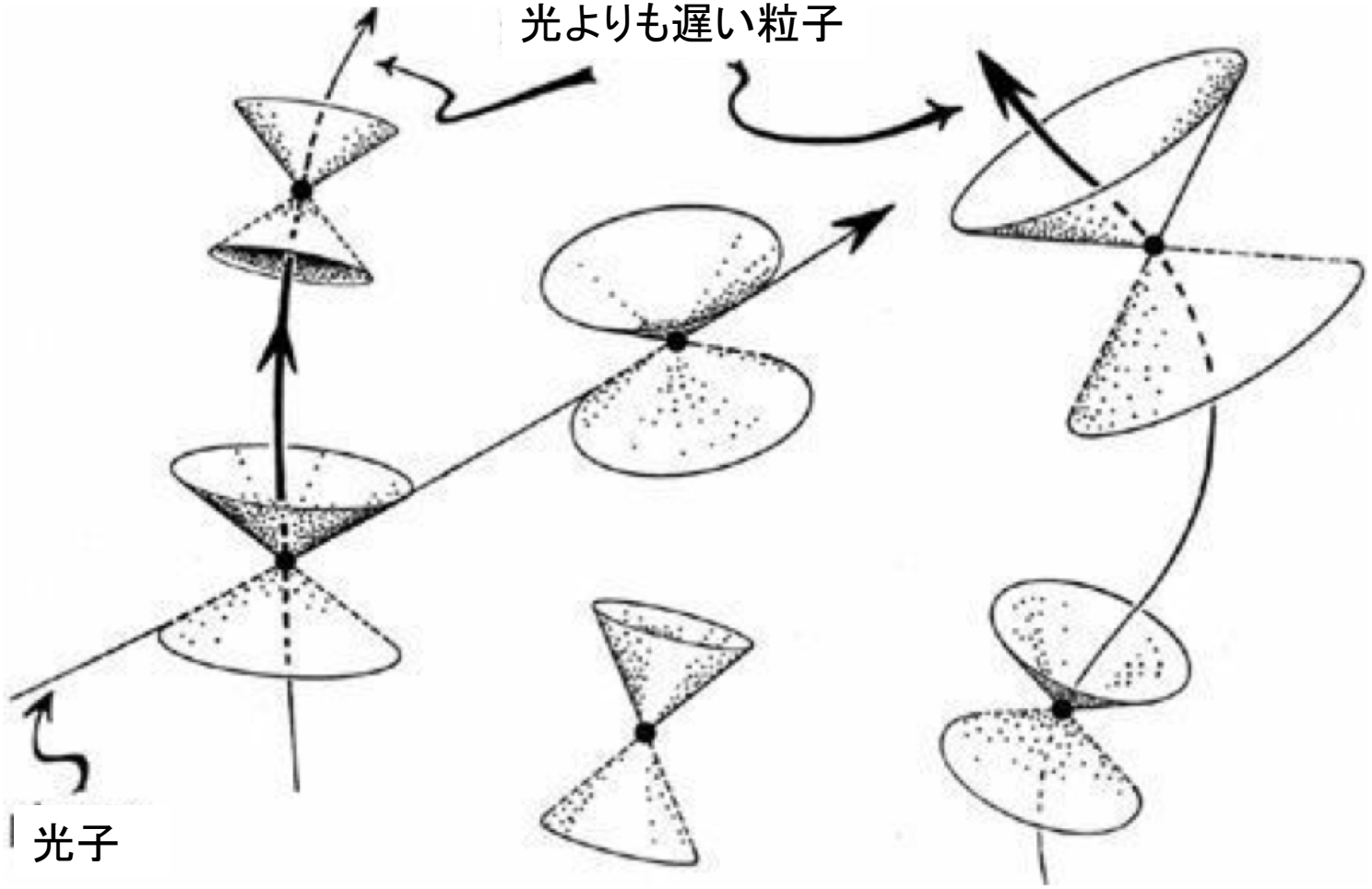
ミンコフスキー空間 pでの光円錐（Null cone）

Penrose “Cycle of Time” https://goo.gl/RBYi5T

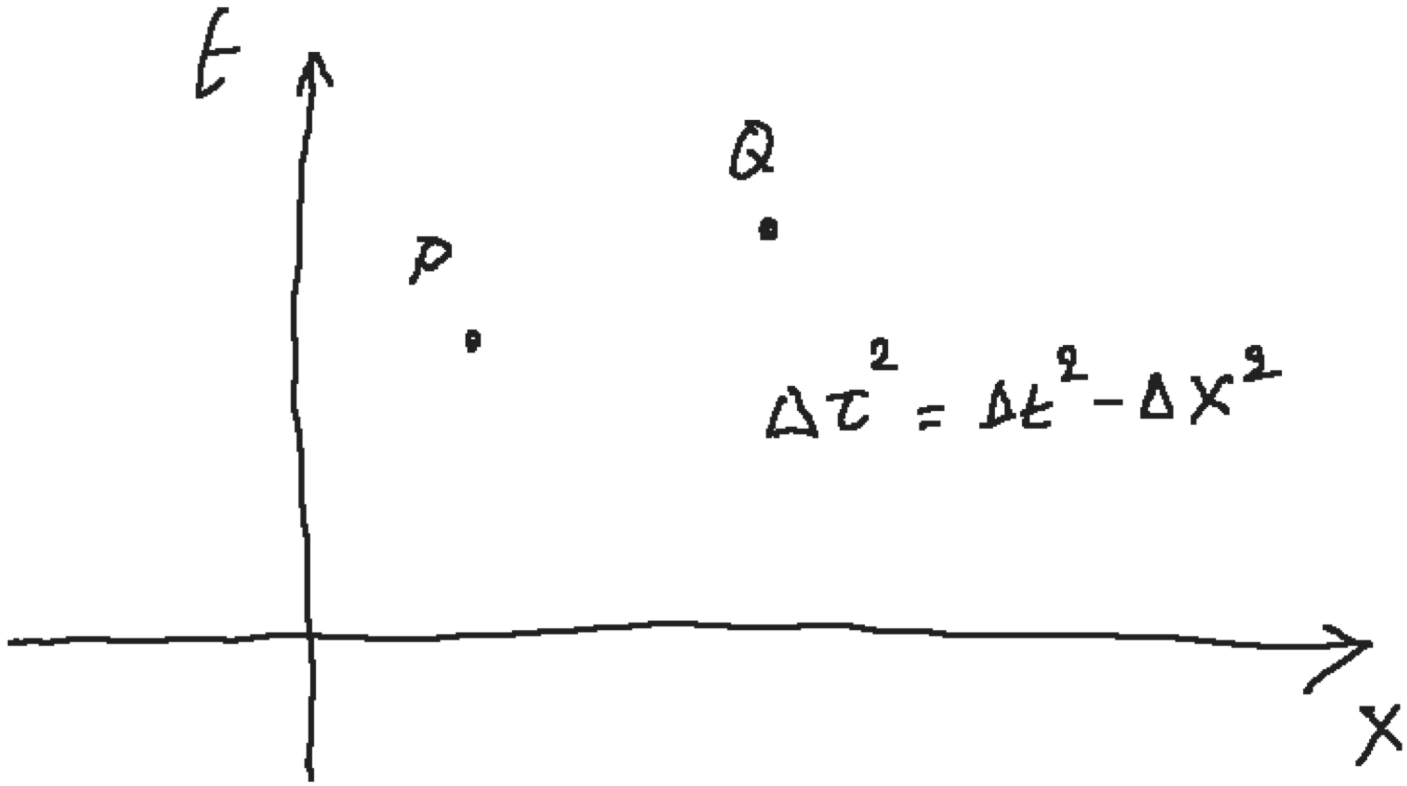


ミンコフスキー空間の各点に
一様に置かれた光円錐（たいらな時空）
特殊相対論

アインシュタインは、時空の各点に時計を置いた



ミンコフスキー空間の各点に
非一様に置かれた光円錐（曲がった時空）
一般相対論



ミンコフスキー時空の二つの点（「イベント」と呼ぶ）P, Qの間の距離（「固有時間」と呼ぶ）は、 $\Delta\tau^2 = \Delta t^2 - \Delta X^2$ で定義される。

$$dS^2 = g_{\mu\nu}\, dX^\mu\, dX^\nu$$

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu}\, dX^\mu\, dX^\nu$$

$$X^\mu = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^0 \\ X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix}$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu}(X)\, dX^\mu\, dX^\nu$$

Flat spaces

Euclidean geometry → Minkowski geometry

Kronecker δ tensor → η tensor

Newton physics → special relativity

Non flat spaces (always locally flat)

Curved metric → gravitational field

Riemannian geometry → Einstein general relativity

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

https://goo.gl/UGZY4M

今後の予定

「数える」と「集める」の数理



MaruLabo数理ナイト
第二夜 5/29「集合論入門」

第二夜 – 集合論入門

- 思考実験１:「無限に数え続けることは可能か考えてみよう」
- 思考実験２:「数えられないものがあるか考えてみよう」

- 無限と連続:カントールが考えたこと
- カントールが答えられなかったこと:「連続体仮説」
- ラッセルが見つけた集合論の矛盾
- ツェルメロ＝フランケル:集合論の体系の整備
- 非カントール的集合論の発見
- 「理論」と「モデル」
- 数学の基礎を基礎付ける試みの発展
  ZFC, Topos Theory, Univalent Theory

第三夜 -- 計算理論入門

- 思考実験1：小学校で習った加減乗除の計算ルールを、それぞれの演算について、すべて文章で記述してみよう
- 思考実験2：「私の言うことはすべて嘘である」は正しい言明か考えてみよう

- 「計算」とは何か
- 「計算」のモデル：
  チューリング・マシンとチャーチのラムダ・カリキュラス
- ゲーデルの「不完全性定理」と「完全性定理」
- ゲンツェンの数論の無矛盾性証明
- 「計算可能性」の帰納関数論による定式化
- ドイッチェ：量子コンピュータの「計算可能性」
- 「計算の複雑性」の理論

第四夜 – 証明をする機械は可能か？

- 数学でのコンピュータ利用のトピックス
  「四色問題」「例外リー群E8」
- 数学でのコンピュータ利用の必要性について
- 証明支援システム COQ
- マーティン＝レフの「型の理論」
- ビョブドスキーの「ホモトピー・タイプ・セオリー」