

量子コンピュータを
やさしく理解する三つの方法

Philosophy is written in this grand book – I mean the universe – which stands continually open to our gaze, but it cannot be understood unless one first learns to comprehend the language and interpret the characters in which it is written. It is written in the language of mathematics, and its characters are triangles, circles, and other geometrical figures, without which it is humanly impossible to understand a single word of it; without these, one is wandering around in a dark labyrinth.

– Galileo Galilei

The theory of quantum electrodynamics describes Nature as absurd from the point of view of common sense. And it agrees fully with experiment.

So I hope you can accept Nature as She is absurd.

-- Feynman

These are the most general postulates of quantum mechanics and, surprisingly, never appear in any textbooks on the subject.

There are two reasons for this. First of all, some people consider the present topic too difficult. However, more importantly, more people are not even aware of them, even when they work within quantum mechanics and its applications!

These axioms are, however, extremely important for us and will be exploited extensively in the remaining part of the book.

-- Vlatko Vedral

Why it took 60 years for quantum teleportation to be discovered?

No one before had considered the information-processing features of quantum theory and had therefore simply not thought to ask the question.

-- Bob Coecke

はじめに

- 量子コンピュータに対する関心の高まりの中で、一見近寄りにくくみえるこの素材を、多くの人にわかりやすく理解してもらおうとする模索も活発に行われている。小論は、その中から三つの試みを紹介したものである。

- 最初に紹介したTerry Rudolphの本は、著者自身が、「15歳の時の自分に向けて書いた」と言っているように、中・高生の読者をも意識したものだ。その特徴は、一切、数式を使わないところにある。
- 古典的な論理ゲートとの対比で、ボールを入れるとボールが出てくるPETEという名前の不思議なボックスの振る舞いを通じて、量子ゲートの働きを直感的に理解させようとする。

はじめに

- Terry Rudorpfの本で興味深いのは、「エンタングルメント」のトピックを、真正面から取り上げていることである。「エンタングルメント」という言葉や概念は用いていないのだが、彼の本の「超能力者ゲーム」は、「エンタングルメント」の不思議さを、中高生にもわかる形で見事に表現した出色のものだと思う。
- 二番目に紹介するUmesh Vaziraniのアプローチは、高校生・大学生をターゲットにしたものである。このアプローチでは、数学が必要になる。ただ、ここが重要なことなのだが、そこで利用される数学は、高校生でも理解できる、ベクトルと行列の演算を中心とする初歩的な線形代数である。
- 線形代数にも難しい部分があるのだが、量子コンピュータを構成する量子ゲートの基本的な働きを知るには、難しい数学は必要ないのだ。実は、こうした「わかりやすさ」は、これまで見落とされてきたことである。

はじめに

- Vaziraniのアプローチの特徴は、広い分野からなる難しい量子力学から、基本的な量子の情報理論を分離して取り出すことである。そして、量子の振る舞いの基本原則を、公理化して単純化し、そこから出発する。
- 量子情報理論にフォーカスした、Vaziraniのアプローチは新しいものである。量子論をわかりやすく理解しようと思ったら、古い量子力学の体系から学び始めるのではなく、新しいフレームで学び始めるのが一番である。
- 筆者が、この間展開している「紙と鉛筆で学ぶ量子情報理論」のシリーズは、基本的には、Vaziraniのアプローチに依拠したものである。

はじめに

- 量子論は100年以上の歴史を持ち、フォン・ノイマンの体系化からも80年以上経っている。量子論は、ある意味、古い学問でもある。しかし、量子論は、どんどんその姿を変えている。残念ながら、物理の「専門家」でも、そのことに気づいていないという。（小論の三番目のepigramでの*Vlatko Vedral* の「驚き」を見るのがいい）
- 小論が紹介する第三番目のBob Coeckeらのアプローチの背景には、こうした量子論自体の大きな変化がある。彼が対象としているのは、大学生である。あるいは、量子論をある程度理解している人を対象にしている。なぜか？　これまでの量子論理解の枠組みは、量子論の新しい展開の前には、必ずしも「わかりやすい」とはいえないことが明らかになってきているからだ。

はじめに

- そのことは、Bob Coeckeが物理学者に向けて問いかけた次のような言葉を見ればはっきりする。
  「エンタングルメントが発見されてから、物理学者がその重要な帰結である量子テレポーテーションを発見するまで、なぜ60年もかかかったのだろうか？」
- 彼の答えは、「量子の情報過程とこの構成を記述する言語が不十分なものだったから」というものだ。それは物理学者にとっても旧来の枠組みが、新しい量子現象を理解するには、「わかりにくい」ものだったということに他ならない。
- 彼は、新しい「言語」として図形（Diagram）を使うことを提案する。数式を使うことをやめ、図形を使って、図形に対する直観に依拠して量子過程を「絵解き」しようとする。その方が「わかりやすい」はずだと。

はじめに

- Bob Coeckeの主要な関心は、「エンタングルメント」と「量子テレポーテーション」を、わかりやすく理解させることにある。「エンタングルメント」は、cup状の一本の弧で表現され、「量子テレポーテーション」は、連続的に変形する図形が、ついには一本の直線になることで説明される！
- 小論のタイトルを、「量子コンピュータをやさしく理解する三つの方法」としたのだが、実は、ここで紹介した三つの方法は、その対象読者も、「わかりやすさの」狙いも、それぞれ異なっている。Terry RudorphとBob Coeckは、できるだけ数式を使わないようにしているのだが、その理由は異なっている。Vaziraniは数式を使うのだが、それにも理由はある。

はじめに

- 小論が伝えたいことは、様々なレベルで「わかりやすさ」の探求が始まっていることと、それにはそれぞれ理由があるということである。また、こうした変化は、新しい時代の始まりの予兆だと僕は考えている。
- 「わかりにくさ」の根源ははっきりしている。量子の世界は、直感とははなれた不思議な世界だからである。ただ、いずれ我々は、その不思議な世界を、科学の力で捉えて、技術やビジネスに取り込んでいくだろう。
- 量子ビジネスの立ち上がりの時期を予想するのは難しいのだが、それは、明日でも来月でもないのははっきりしている。ただ、それを準備する時間があるのは幸運なことだと思う。それを今からドライブするのは、まず、皆さんの「知的好奇心」だと、僕は考えている。

Agenda

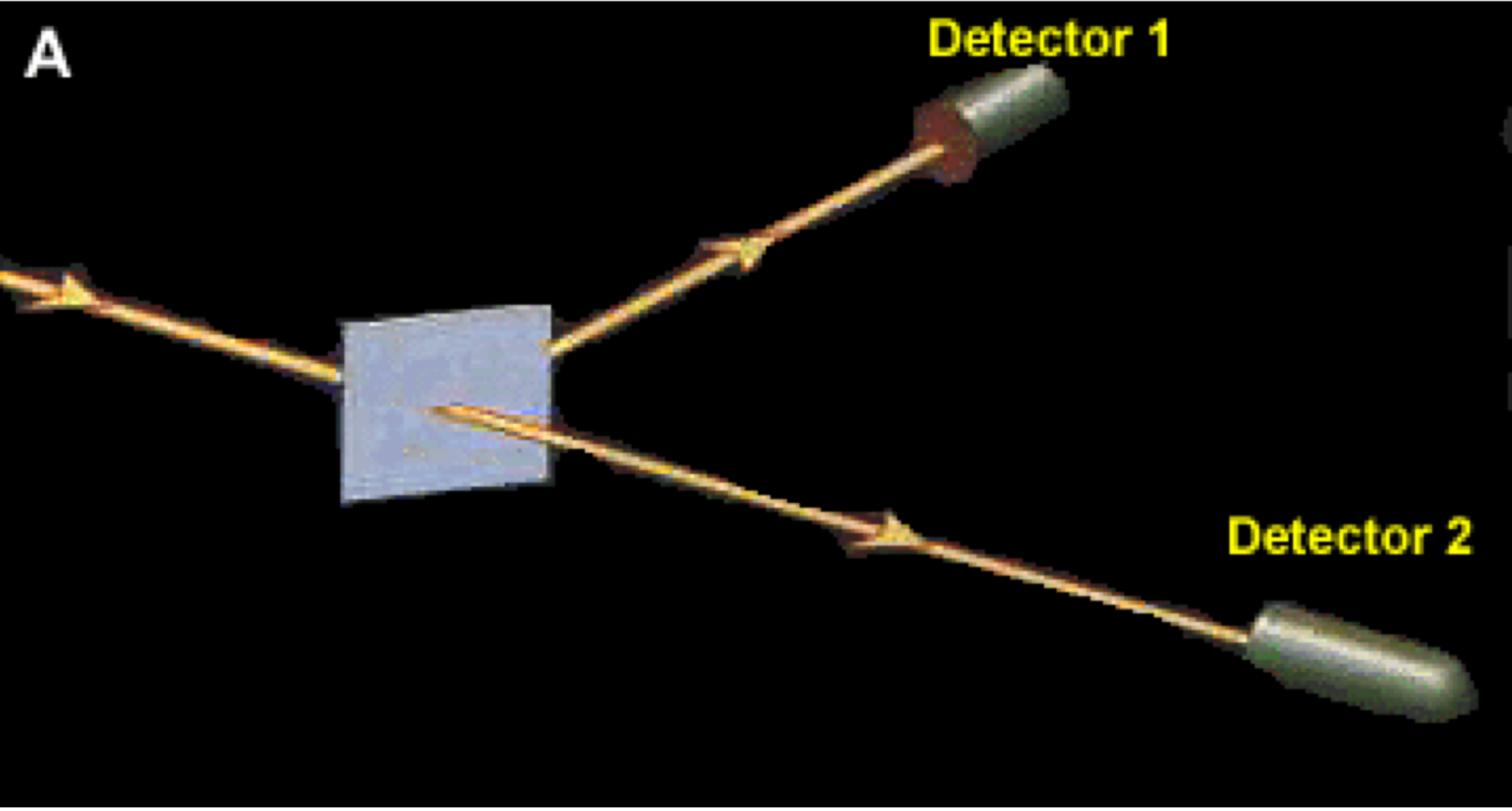
- 量子の不思議な世界
  - Mach Zehnder 干渉計
  - エンタングルメント
  - 量子テレポーテーション
  - ER=EPR あるいは GR=QM
- Terry Rudolphのアプローチ
  - 古典的な論理ゲート
  - 量子論理ゲートPETE
  - 超能力者ゲーム

Agenda

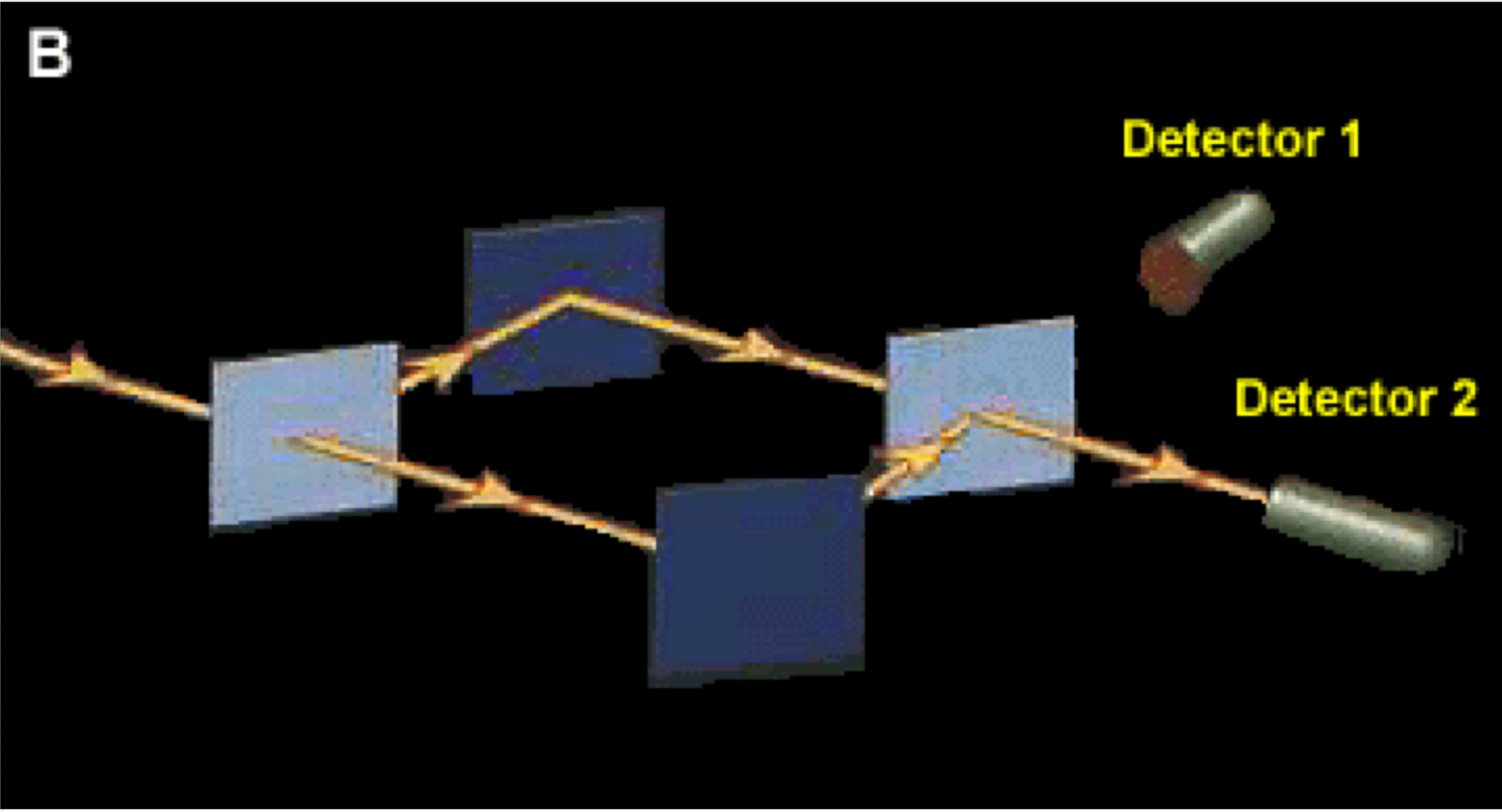
- Umesh Vaziraniのアプローチ
  - 量子論の三つの原理
  - 量子過程の二つの配置
  - Mach Zehnder 干渉計の実験
  - PETE Boxと超能力者ゲームを紙と鉛筆で計算する
  - Quantum Teleportation
- Bob Coeckeのアプローチ
  - String Diagram入門
  - 量子過程を String Diagramで表す
  - 量子テレポーテーションをString Diagramで表す


量子の不思議な世界
IBM Q
System One

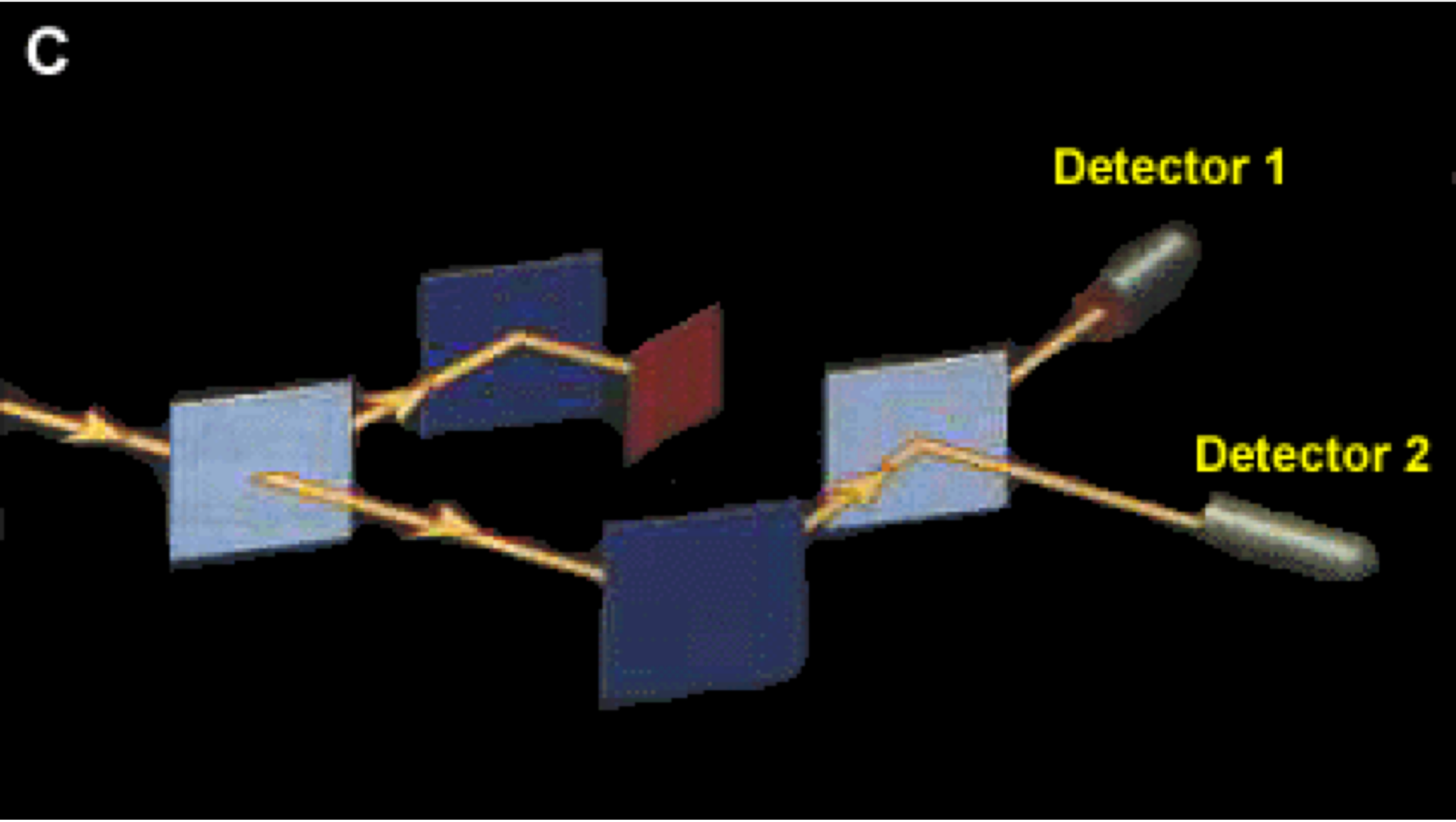

Mach Zehnder 干渉計



光を半分は通し半分は反射する、ハーフミラーを45度の角度で光の進路に置く。光は、二つの検出器に届く。光子一個で実験を繰り返すと、ある光子は検出器1に、ある光子は検出器2に届く。その確率は等しい。ここに不思議なことはない。



ハーフミラー二つと鏡二つを組み合わせて、上のような装置を作る。光は検出器の一方にしか届かなくなる。干渉？
奇妙なことは、光子一個で実験しても、このことは変わらない。
一個の光子は、二つの道を「同時」に通っている。



もっと奇妙なことは、光路の一方を塞ぐと、光は両方の検出器に届くようになる。光子一個で考えると、行く手を阻まれた光子は、そのことを、他方の光子に伝えて（どっちも自分自身なのだが）、いるように見える。

PRINCETON SCIENCE LIBRARY

QED

The Strange Theory of Light and Matter

Richard P. Feynman



https://goo.gl/W9aY7E

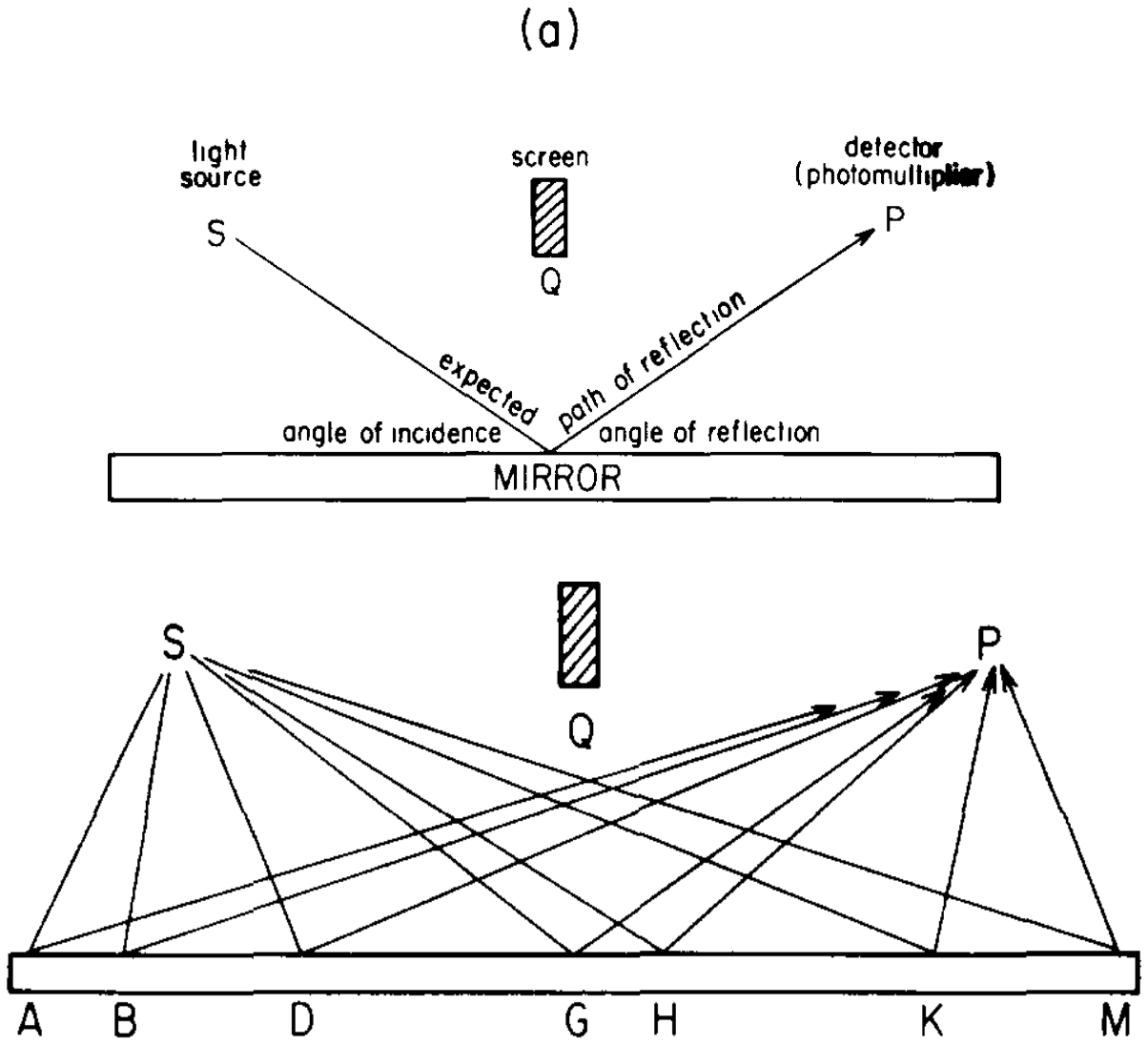
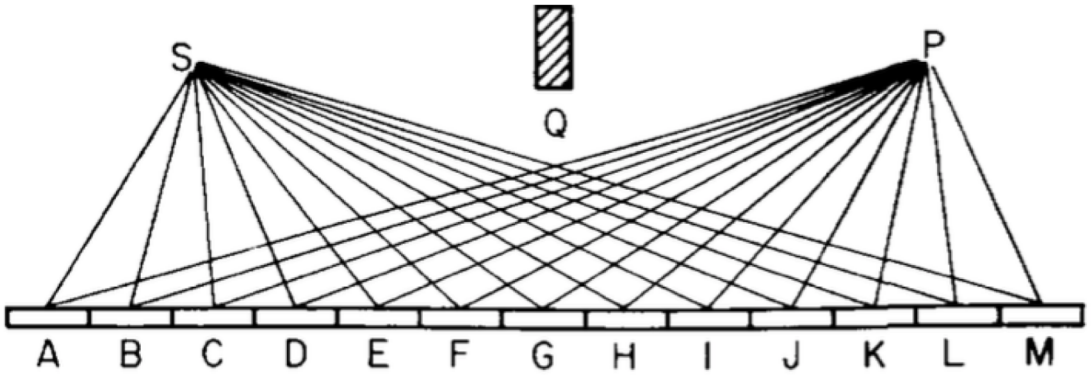
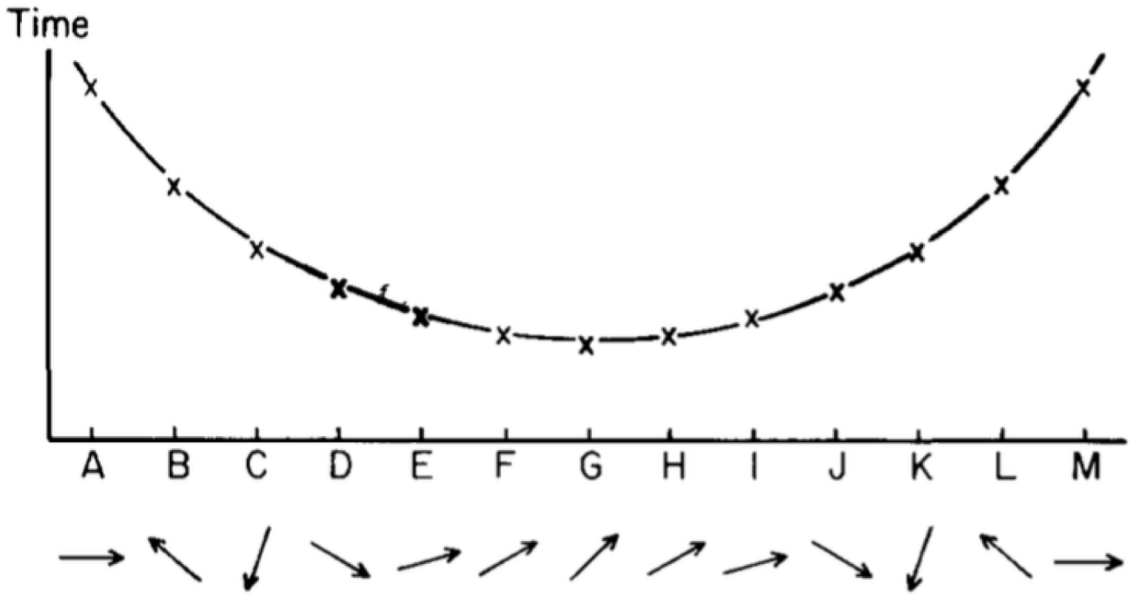
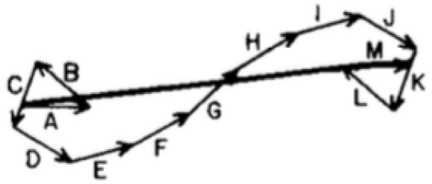


FIGURE 20. *The quantum view of the world says that light has an equal amplitude to reflect from every part of the mirror, from A to M.*


S
P
Q
A B C D E F G H I J K L M


Time
A B C D E F G H I J K L M


A B C D E F G H I J K L M

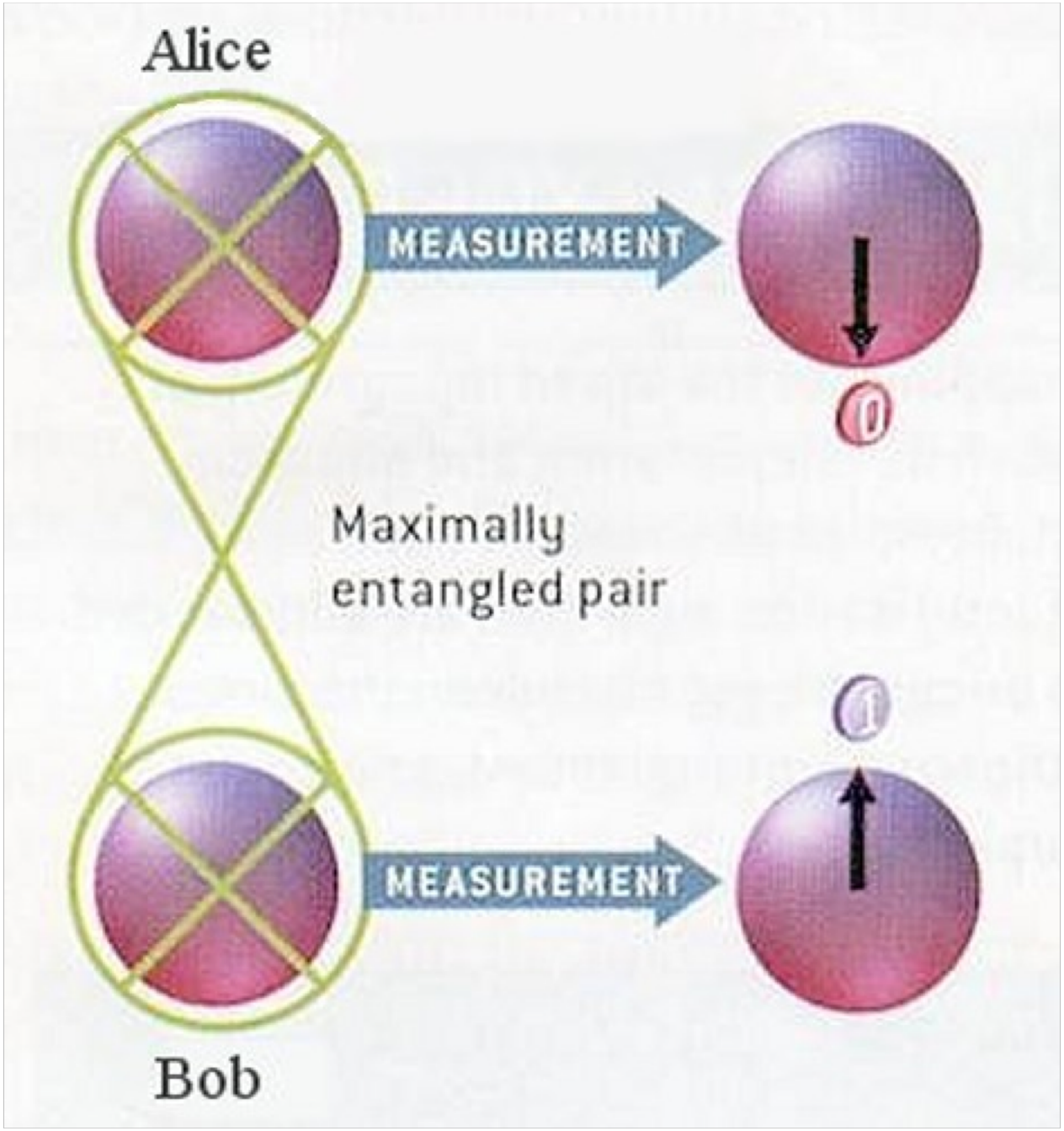
- The next reason that you might think you do not understand what I am telling you is, while I am describing to you *how* Nature works, you won't understand *why* Nature works that way. But you see, nobody understands that. I can't explain why Nature behaves in this peculiar way.
- Finally, there is this possibility: after I tell you something, you just can't believe it. You can't accept it. You don't like it.

- It is not a question of whether a theory is philosophically delightful, or easy to understand, or perfectly reasonable from the point of view of common sense. The theory of quantum electrodynamics describes Nature as absurd from the point of view of common sense. And it agrees fully with experiment. So I hope you can accept Nature as She is absurd.

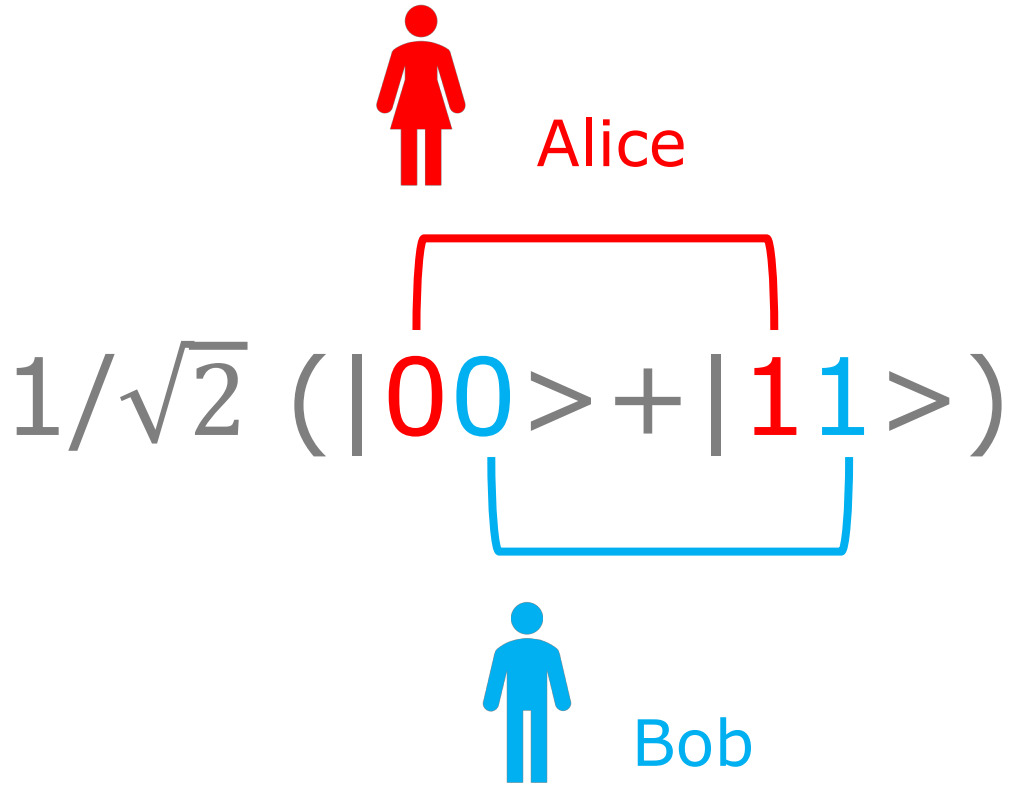

エンタングルメント

EPRペア -- もつれあった二つの量子

- エンタングルメントを最初に発見したのはアインシュタインである。1935年のことである。もつれあった二つの量子を、この現象の発見者(Einstein, Podolsky, Rosen)の頭文字をとってEPRペア と呼ぶことがある。
- EPRペアの状態は一つの式で表される。それにもかかわらず、それは二つの量子の状態、すなわち、からみあった二つの量子の状態を表しているのである。
- 興味ふかいのは、こうしたからみあった二つの量子の関係は、二つの量子の間の距離には関係のない性質だということである。この関係は、二つの量子が、たとえ銀河を隔てて何万光年離れたとしても、からみあいはそのまま維持されるのである。


Alice
MEASUREMENT
0
Maximally
entangled pair
1
MEASUREMENT
Bob

EPRペア：もつれ合った二つのqubit



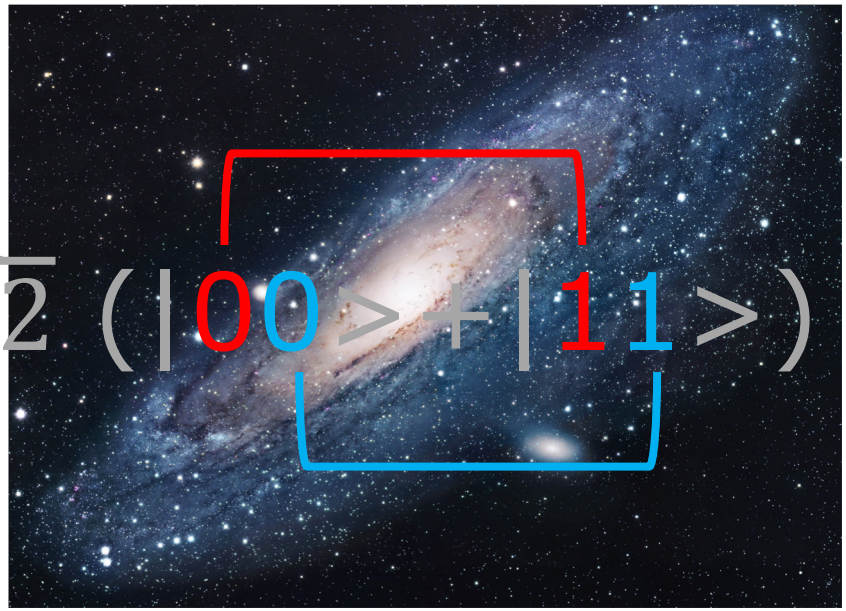
$1/\sqrt{2}$ (|00>+|11>) で表される状態は、二つのqubitの状態である。
一方のqubitをAliceが、他方のqubitをBobが持つことができる。
こうした、もつれ合った二つのqubitを、EPRペアと呼ぶ。

EPRペア：もつれ合った二つのqubit



Alice

$1/\sqrt{2}\ (|00>+|11>)$





Bob

$1/\sqrt{2}\ (|00>+|11>)$

Aliceが観察できるのは、$|00>+|11>$の第一bitで、
Bobが観察できるのは、$|00>+|11>$の第二bitである。
この関係は、両者がどんなに離れていても変わりない。

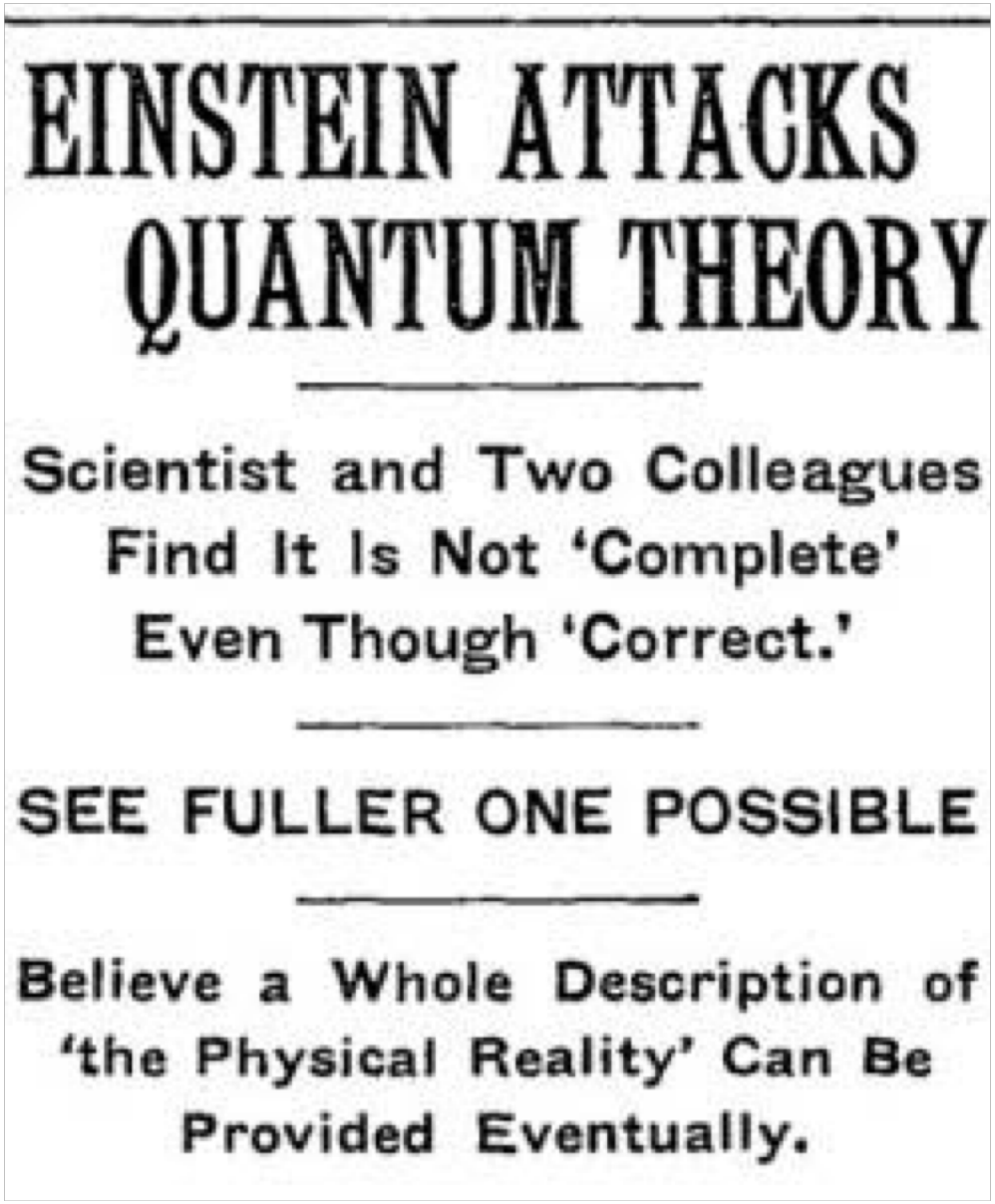
ERPペアの不思議な性質

- Aliceが自分の持つEPRペア、1/√2 (|00>+|11>)の最初のビットを観測したとしよう。それが1である確率は1/2で、0である確率は1/2である。
- 今、その結果が0であったとしよう。この観測の結果、新しい状態は、|00⟩に変わる。それは、第二ビットの観測が、0である確率が 1 であることを意味する。100% の確率で、Bobの持つ第二ビットの状態が0であることがわかる。
- **すなわち、Aliceが自分のqubitで状態0を観測するとすぐに、遠く離れたBobの持つqubitの状態が0であることがわかることになる。**
- AliceとBobが、どんなに離れていても、Aliceが自分の量子を観測した瞬間に、エンタングル状態は解けて、遠く離れたBobの観測結果が、瞬時に確実にわかるのである。これは、遠く離れたBobの持つ情報が、瞬時にAliceに伝わるように見える。これは、「情報は、光の速さ以上のスピードでが伝わらない」という相対論の要請と矛盾しないか？

EPRパラドックス
「馬鹿げた遠隔作用」

- 実際、エンタングルメントを最初に発見したアインシュタインは、これを「馬鹿げた遠隔作用」と呼んで、量子論が不完全な理論であることの根拠にした。
- アインシュタインは、量子論は、実在について「隠れた変数」を見落としているので、こうした奇妙な矛盾した状態が生まれることになると主張した。エンタングルメントは、当初は、「EPRパラドックス」と呼ばれていた。

EPR論文を報ずる1935年のニューヨークタイムズ紙



EINSTEIN ATTACKS
QUANTUM THEORY

Scientist and Two Colleagues
Find It Is Not 'Complete'
Even Though 'Correct.'

SEE FULLER ONE POSSIBLE

Believe a Whole Description of
'the Physical Reality' Can Be
Provided Eventually.

- 1964年、ベルは、アインシュタインの「隠れた変数」理論が、成り立たないことを理論的に証明し、1982年には、アスペが、ベルの理論が正しいことを大規模な実験で証明した。

1964年　Bellの定理
アインシュタインの「隠れた変数」の否定

ON THE EINSTEIN PODOLSKY ROSEN PARADOX*

J. S. BELL†
Department of Physics, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin

(*Received* 4 *November* 1964)

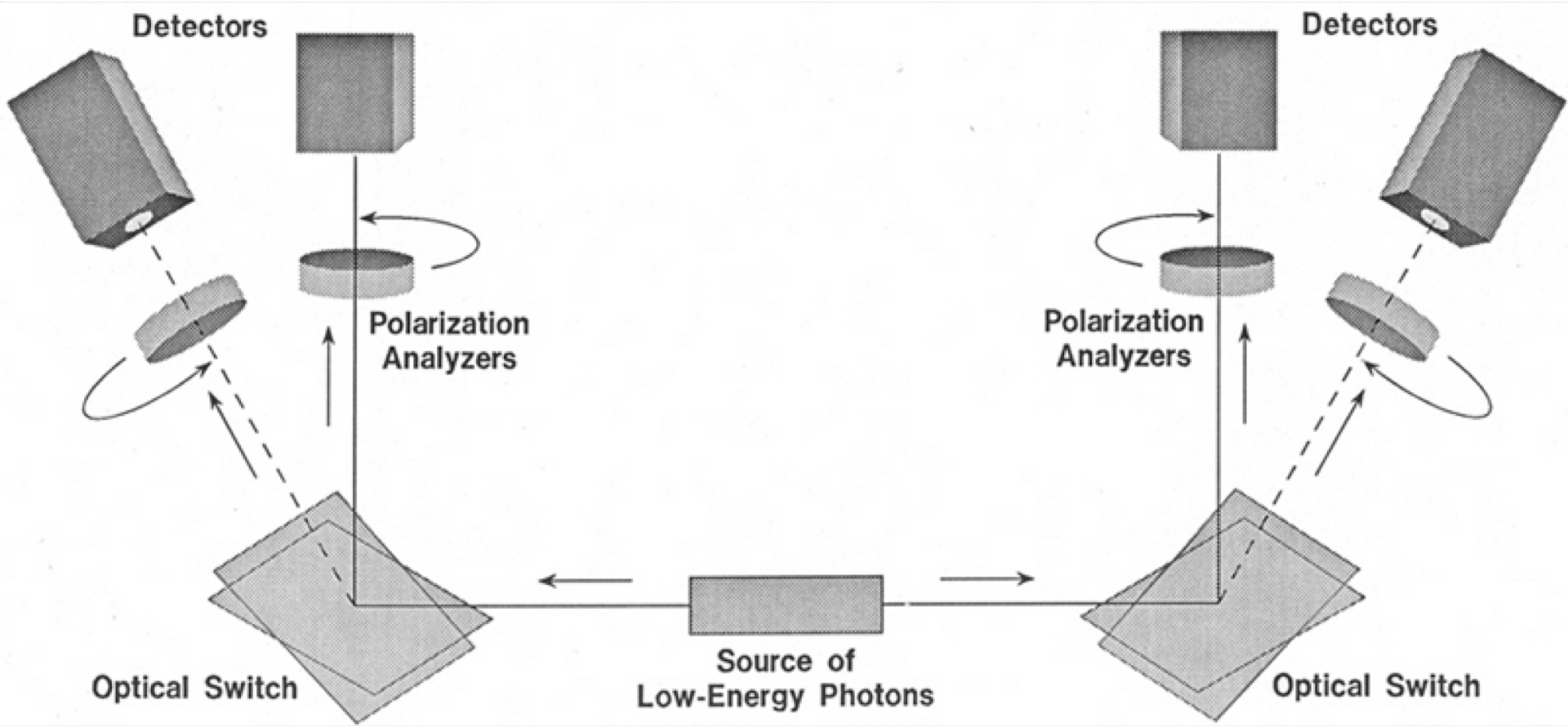
I. Introduction

THE paradox of Einstein, Podolsky and Rosen [1] was advanced as a
could not be a complete theory but should be supplemented by additio
ables were to restore to the theory causality and locality [2]. In this
mathematically and shown to be incompatible with the statistical pred
the requirement of locality, or more precisely that the result of a meas
by operations on a distant system with which it has interacted in the
ficulty. There have been attempts [3] to show that even without such
ment no "hidden variable" interpretation of quantum mechanics is pos
examined elsewhere [4] and found wanting. Moreover, a hidden variab
tum theory [5] has been explicitly constructed. That particular interp
local structure. This is characteristic, according to the result to be
reproduces exactly the quantum mechanical predictions.



https://goo.gl/wyvd7B

1982年　Aspectの実験



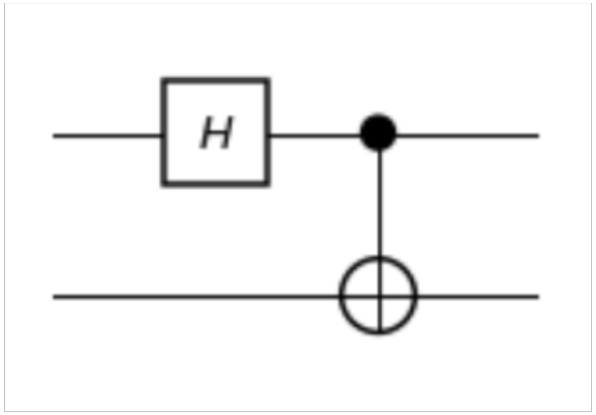
Bellの定理が成り立っていることの実験での確認

But in his final attack Einstein pointed to something so deep, so counterintuitive, so troubling, and yet so exciting, that at the beginning of the twenty-first century it has returned to fascinate theoretical physicists. Bohr's only answer to Einstein's last great discovery— the discovery of entanglement— was to ignore it.

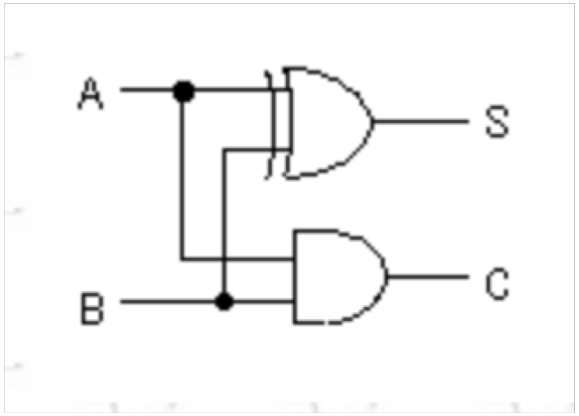
Leonard Susskind

エンタングル状態は簡単に作れる

- EPRペアのような、量子の絡み合った状態は、非常に特殊で稀な状態のように感じられたかもしれない。
- でも、そうではない。量子コンピュータ上では、この状態は、次のように量子ゲート二つの組み合わせで簡単に作ることができる。これをBell State ゲートと呼ぶ。エンタングル状態は、ありふれた普通の状態なのである。



Bell State ゲート

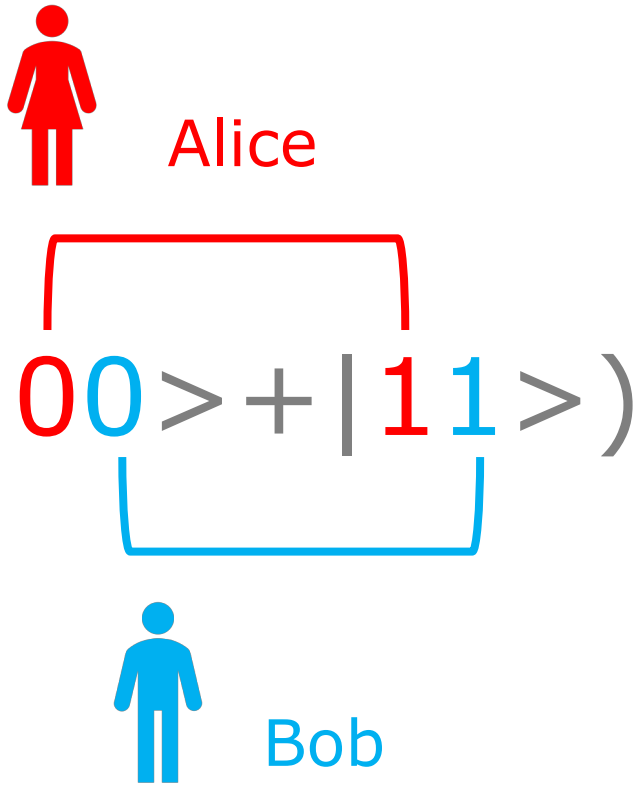


半加算器

Bell State ゲートが生み出す

EPRペア：もつれ合った二つのqubit

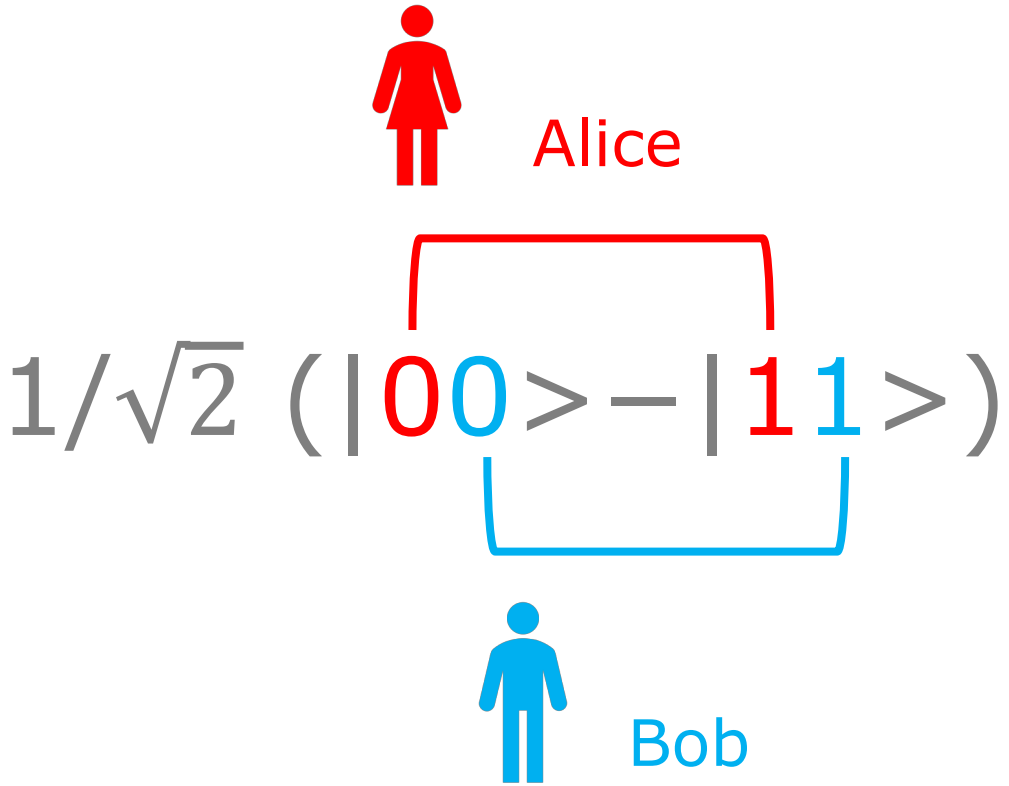
Φ^+



Bell State ゲートが生み出す

EPRペア：もつれ合った二つのqubit

Φ^-



Bell State ゲートが生み出す

EPRペア：もつれ合った二つのqubit

Ψ^+



Alice

$$1/\sqrt{2}\,(|01\rangle+|10\rangle)$$

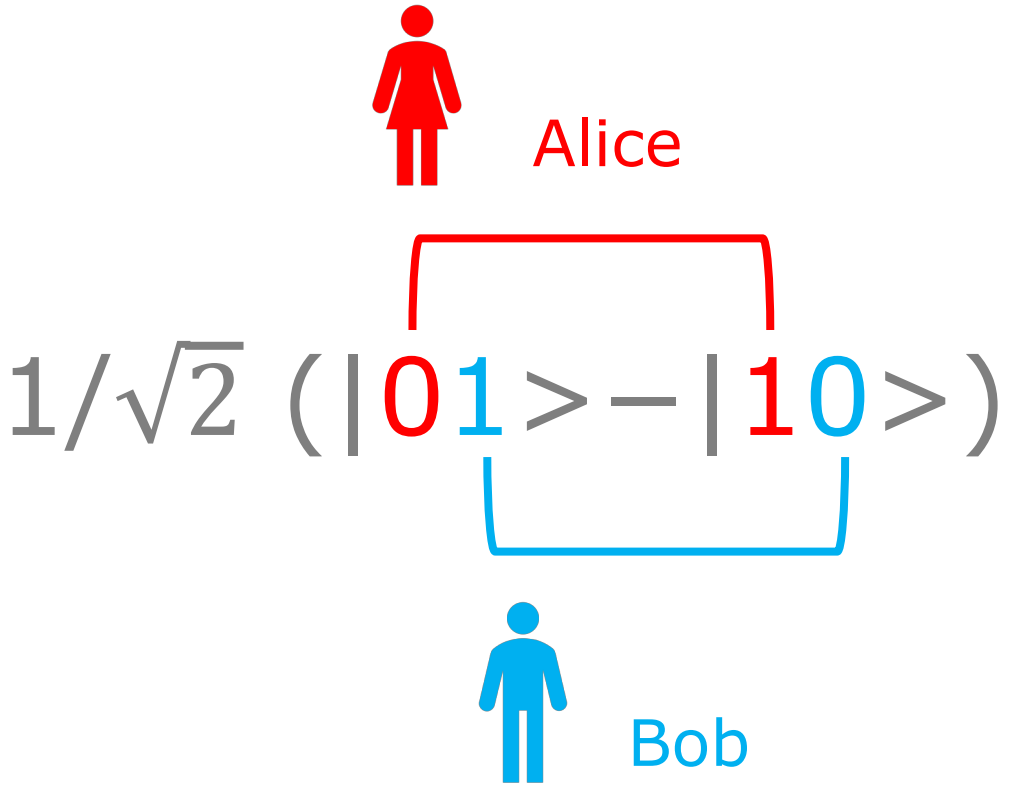


Bob

Bell State ゲートが生み出す

EPRペア：もつれ合った二つのqubit

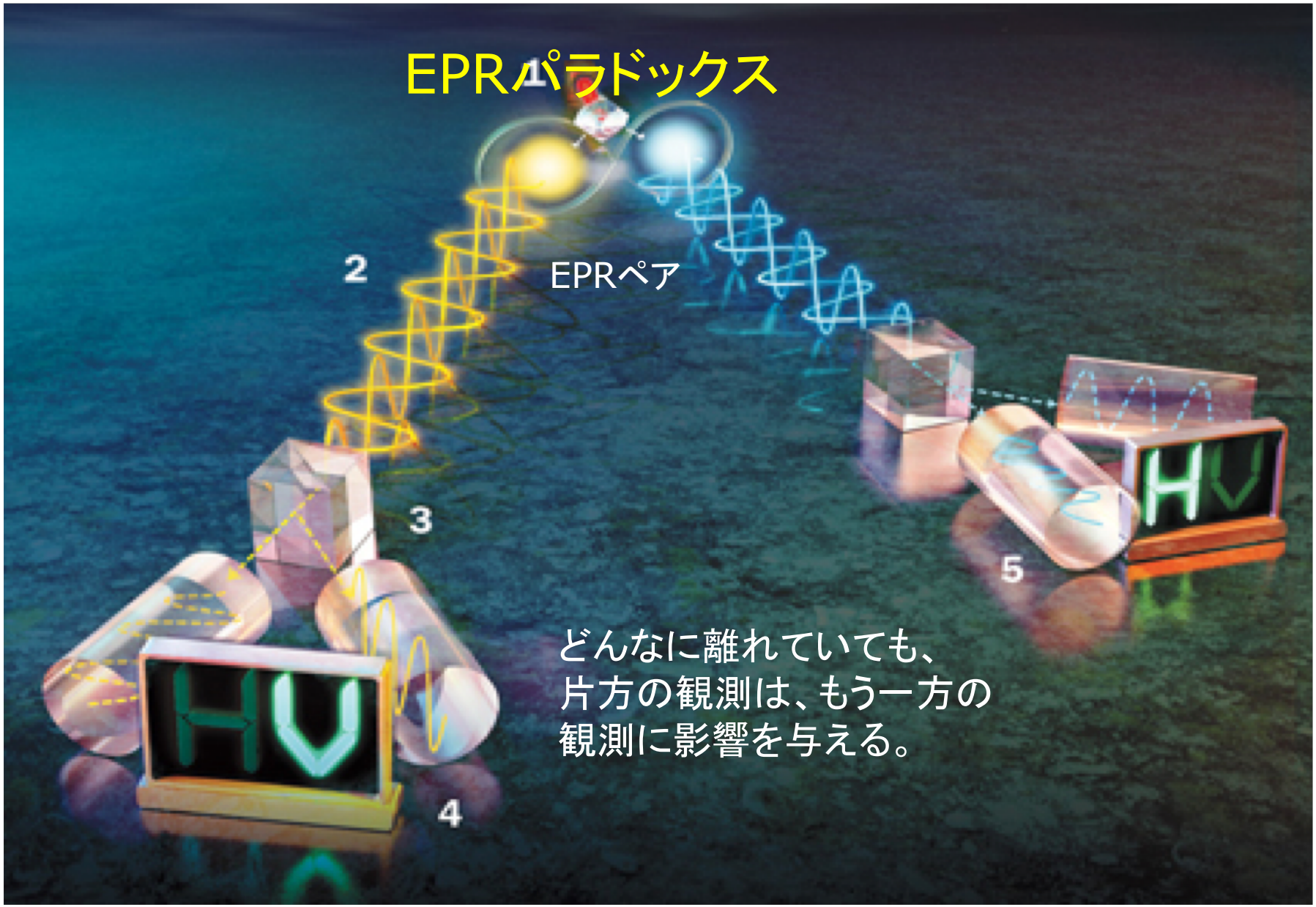
Ψ^-

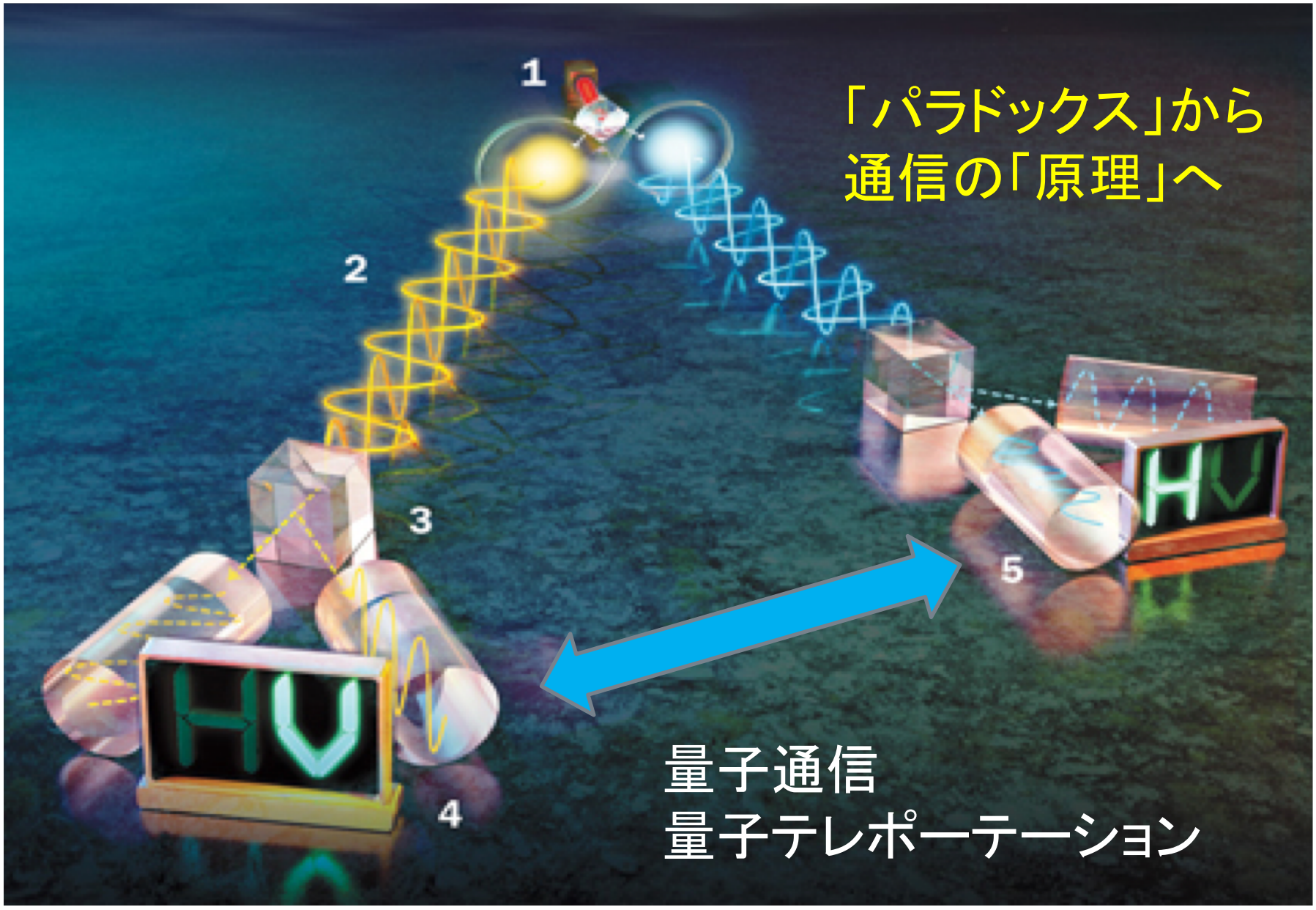



量子テレポーテーション

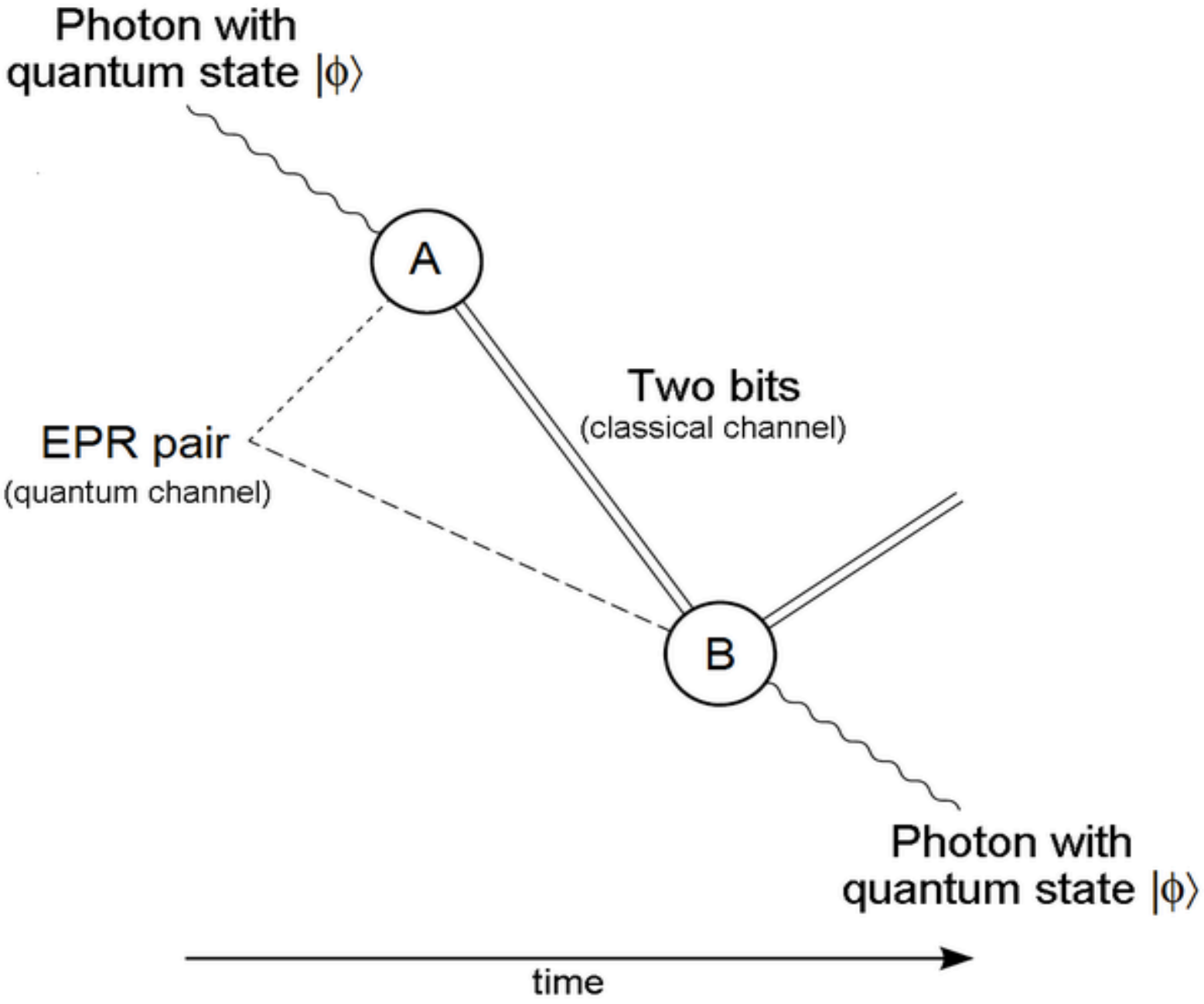
エンタングルメントと
量子テレポーテーション

- 1960年代のベルの結果にも関わらず、多くの人にとって、エンタングルメントは「奇妙な状態」のままであり続けたように思う。
- エンタングルメントの重要性の認識に大きな転機をもたらしたのは、1993年のベネットらによるエンタングルメントを利用した「量子テレポーテーション」の発見であった。ベルの結果から30年、アインシュタインの発見からは、60年近くたっていた。
- 量子テレポーテーションは、量子の状態を遠隔地にそのまま転送する技術である。それは、将来の量子通信の可能性を開くものである。2007年には、Entanglement swappingが発見され、量子テレポーテーションの具体的な通信技術としての実現の道が大きく開かれた。2017年には、中国の研究チームが地上と通信衛星間の量子テレポーテーションに成功したという論文を発表している。

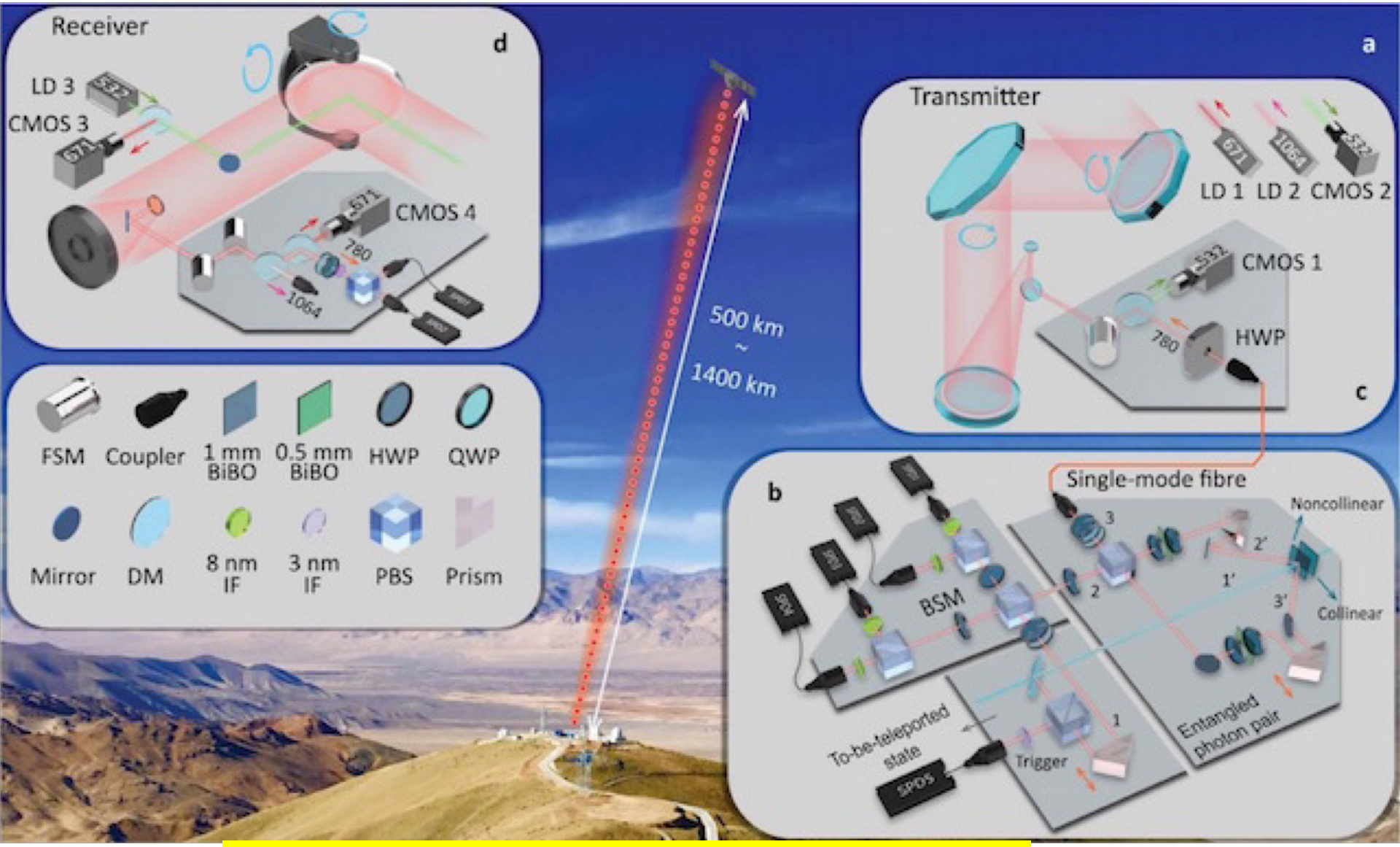

EPRパラドックス
1
2
EPRペア
3
4
5
H V
H V
どんなに離れていても、
片方の観測は、もう一方の
観測に影響を与える。



http://www.sciencenews.org/view/feature/id/65060/description/
Everyday_Entanglement


Photon with
quantum state |ϕ⟩
A
Two bits
(classical channel)
EPR pair
(quantum channel)
B
Photon with
quantum state |ϕ⟩
time

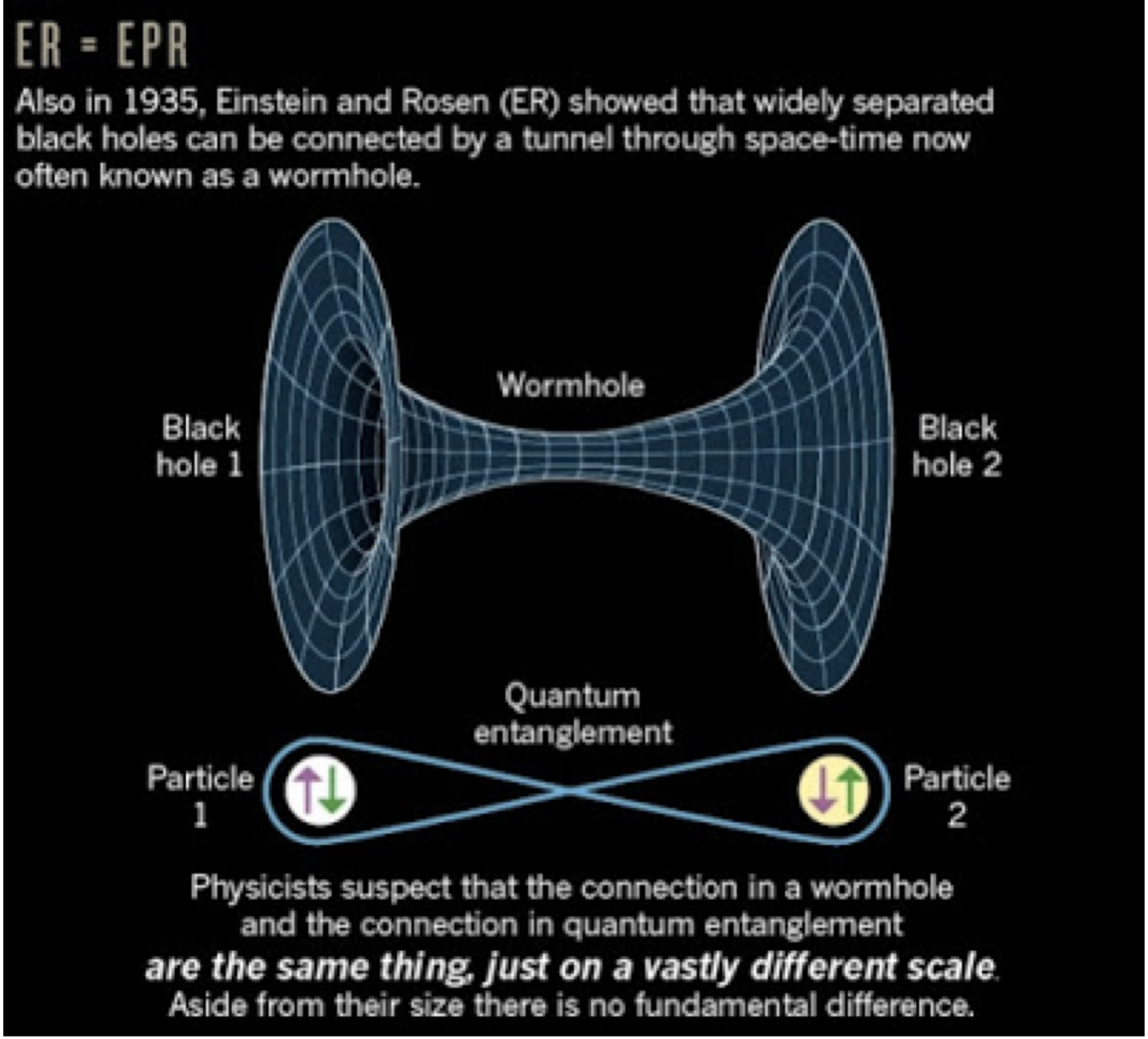
中国、地上–人工衛星間の量子通信に成功



"Ground-to-satellite quantum teleportation"
https://arxiv.org/pdf/1707.00934.pdf

量子論のIT技術への応用では、量子コンピュータに対する関心が高いのだが、エンタングルメントを利用した量子テレポーテーションを基本的なプロトコルとする「量子通信」技術や「量子暗号」技術が、一足先に実用化される可能性は高い。


ER=EPR
あるいは
GR=QM



Natureの2015年11月の記事 "The quantum source of space-time”
https://goo.gl/x0HqA2

ER＝EPR仮説

- 「二つのブラックホールの間のアインシュタイン・ローゼン・ブリッジは、二つのブラックホールのミクロな状態のEPR状の相関関係（エンタングルメント）によって生成される。 … 我々は、これを ER = EPR 相関関係と呼ぶ。別の言葉で言えば、ERブリッジは、その中では、量子システムに関連するEPRが、アインシュタインの重力の記述に弱く結合している特殊なタイプのEPR相関関係なのである。」

- 要するに、1935年にアインシュタインが発見した「エンタングルメント」と二つのブラックホールを結ぶ「アインシュタイン・ローゼン・ブリッジ」は、スケールが全く違うのだが同じものだというのである。これを、「ER = EPR仮説」と呼ぶ。

Wormholeによる量子テレポーテーションの説明

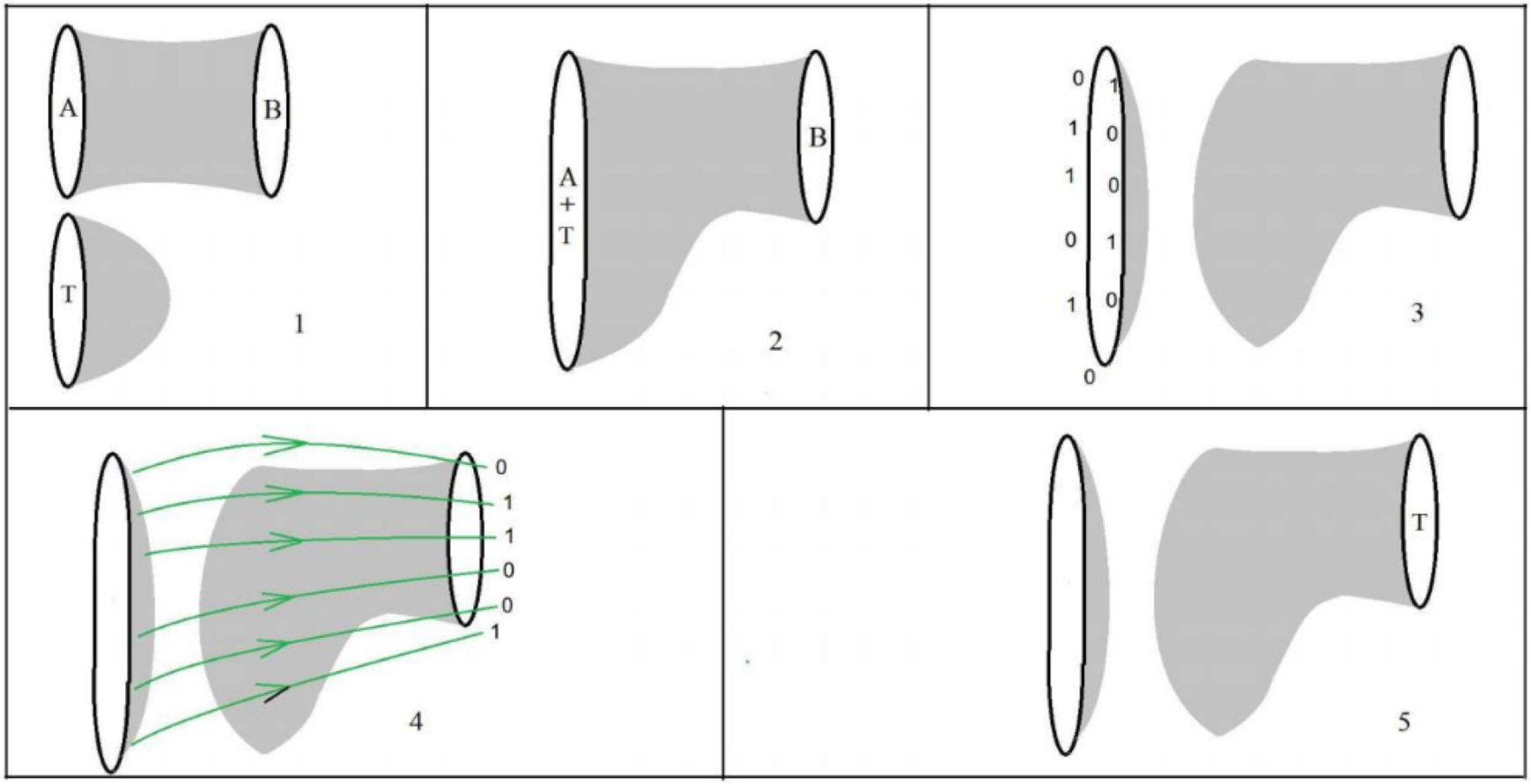
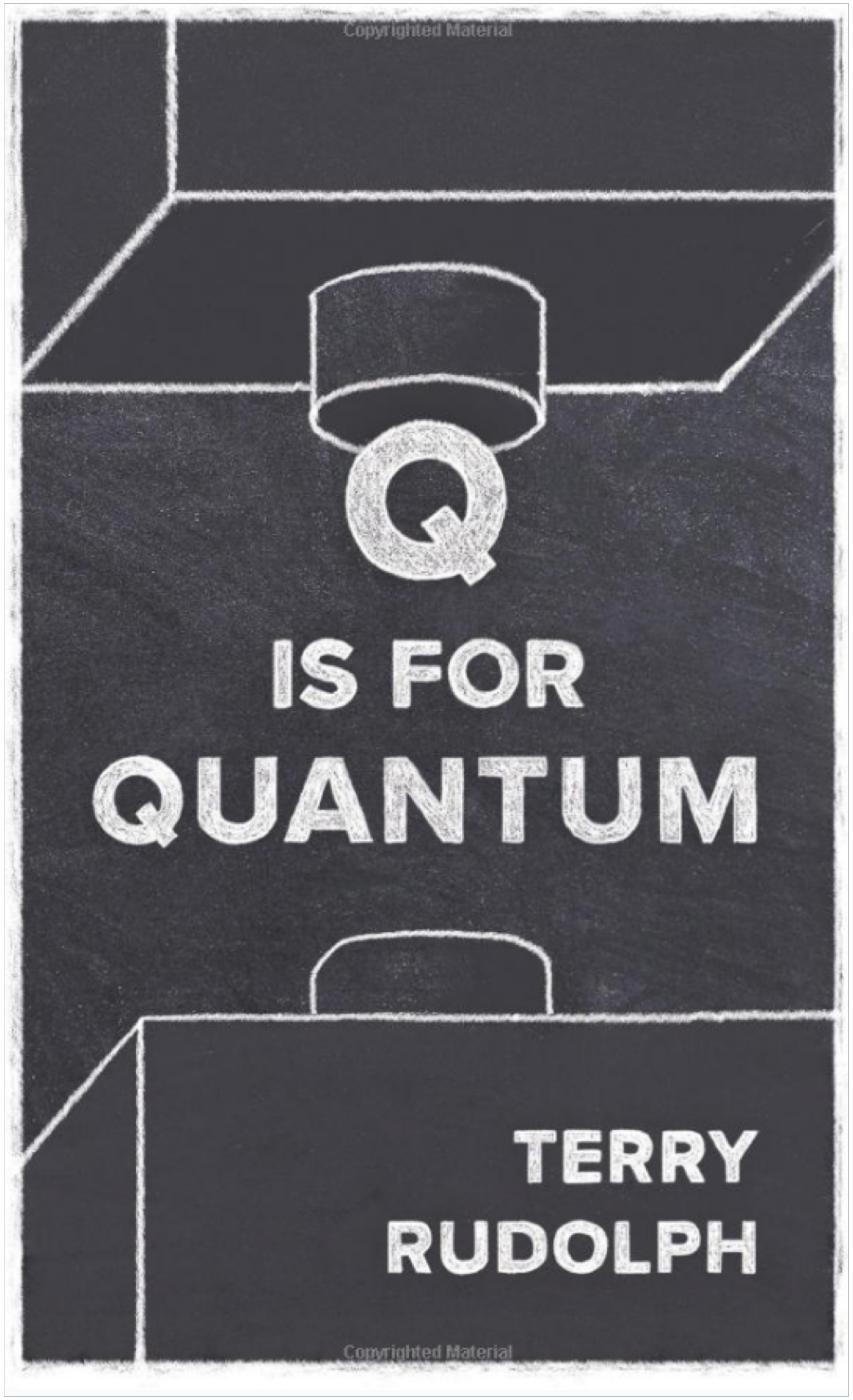


Figure 21: The figures are adapted from the second reference in [4]. They illustrate the five steps described below: 1) Alice combines her share of the mediator, A, with the teleportee T: 2) The combined system (**AT**) evolves for a scrambling time: 3) Alice performs a complete set of measurements on (**AT**) in the computational basis: 4) Alice sends the classical outcome to Bob: 5) Bob applies a unitary rotation, thereby transforming the state of his black hole to $|\Phi\rangle$.



ここで紹介する
三つのアプローチについて



This book has been written for my 15-year-old self.

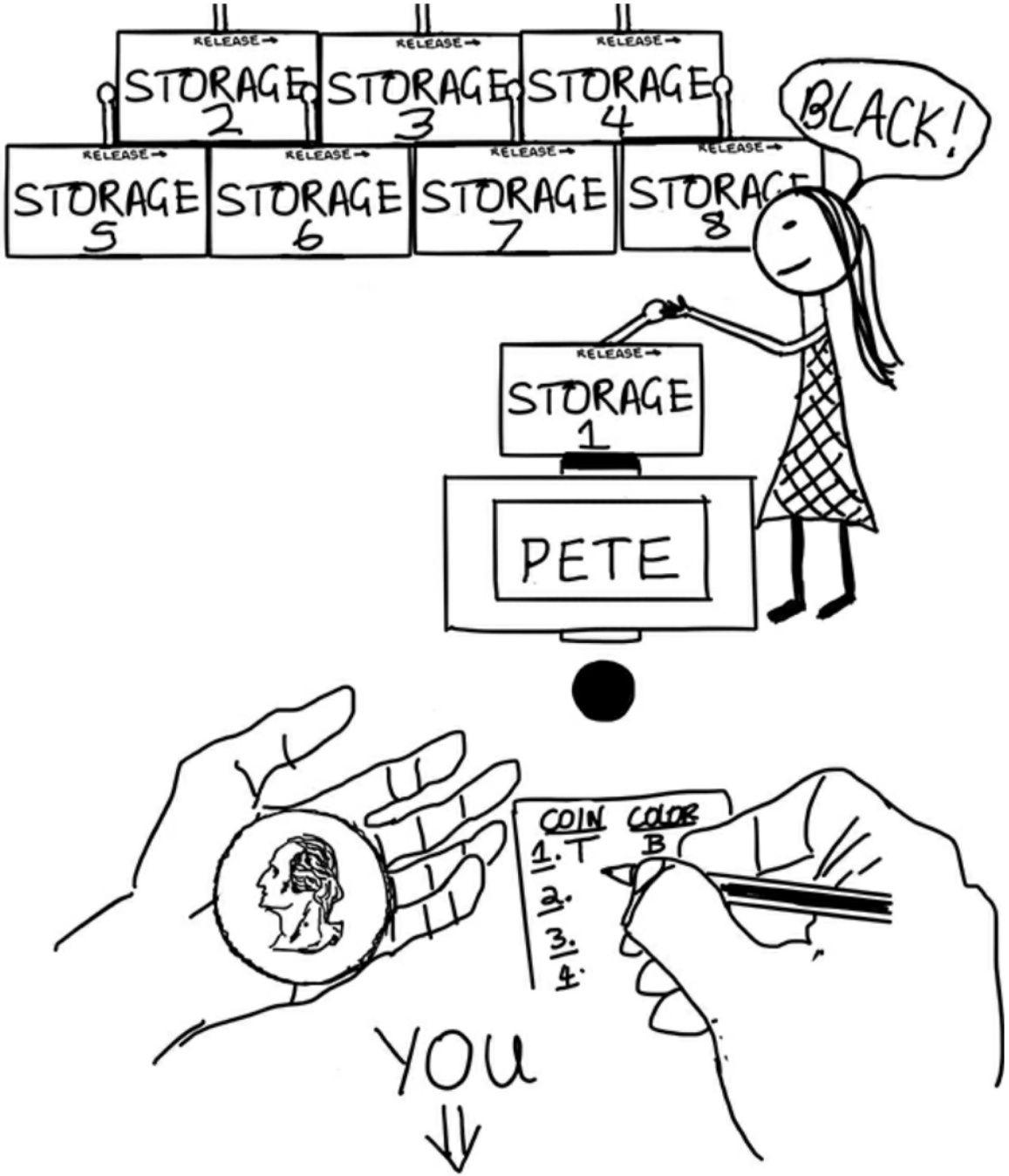
https://goo.gl/VZCZHq



Schrödinger



Terry Rudolph


RELEASE
STORAGE 2
STORAGE 3
STORAGE 4
STORAGE 5
STORAGE 6
STORAGE 7
STORAGE 8
BLACK!
STORAGE 1
PETE
COIN
COLOR
1. T
B
2.
3.
4.
YOU

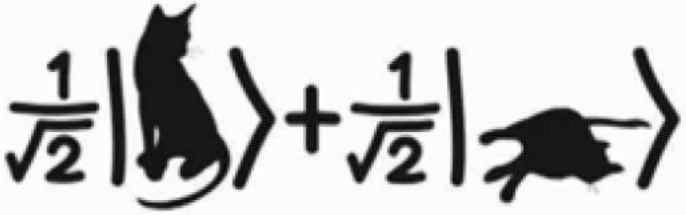
Umesh Vaziraniのアプローチ

“Quantum Mechanics and Quantum Computation”
https://goo.gl/aEGX3Y



Quantum Mechanics & Quantum Computation

Umesh V. Vazirani
University of California, Berkeley



Lecture 2: Qubits & Uncertainty Principle

Geometric Representation

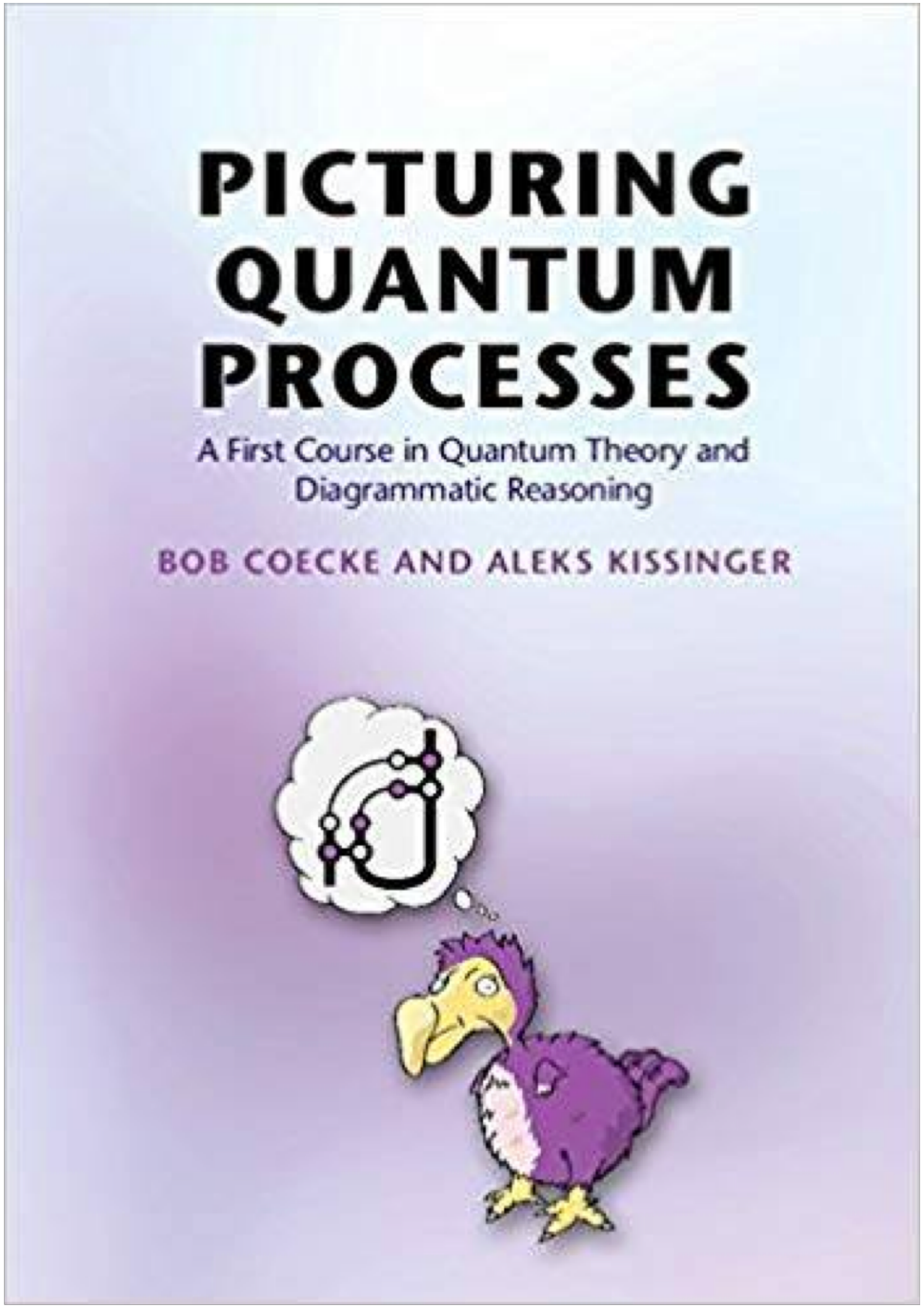


1.2 Basic Quantum Mechanics

Feynman also said, "I think I can safely say that nobody understands quantum mechanics." Paradoxically, quantum mechanics is a very simple theory, whose fundamental principles can be stated very concisely and are enshrined in the three basic postulates of quantum mechanics - indeed we will go through these postulates over the course of the next two chapters. The challenge lies in understanding and applying these principles, which is the goal of the rest of the book (and will continue through more advanced courses and research if you choose to pursue the subject further):

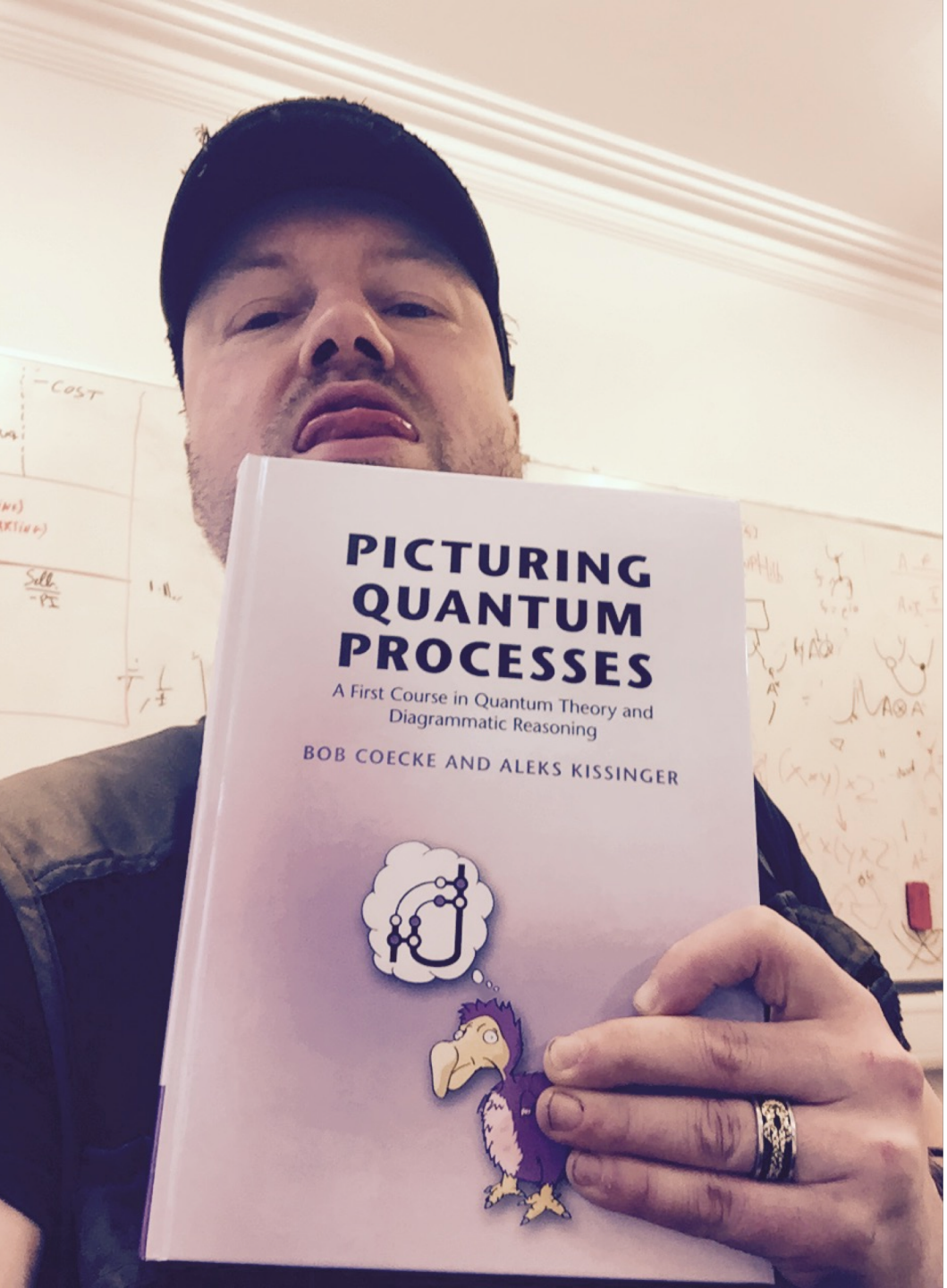
- The superpostion principle: this axiom tells us what are the allowable (possible) states of a given quantum system. An addendum to this axiom tells us given two subsystems, what the allowable states of the composte system are.
- The measurement principle: this axiom governs how much information about the state we can access.
- Unitary evolution: this axoim governs how the state of the quantum system evolves in time.

In keeping with the philosophy of the book, we will introduce the basic axioms gradually, starting with simple finite systems, and simplified basis state measurements, and building our way up to the more general formulations. This should allow the reader a chance to develop some intuition about these topics.



A First Course in Quantum Theory and Diagrammatic Reasoning

https://goo.gl/hmRkKy


PICTURING
QUANTUM
PROCESSES
A First Course in Quantum Theory and
Diagrammatic Reasoning
BOB COECKE AND ALEKS KISSINGER



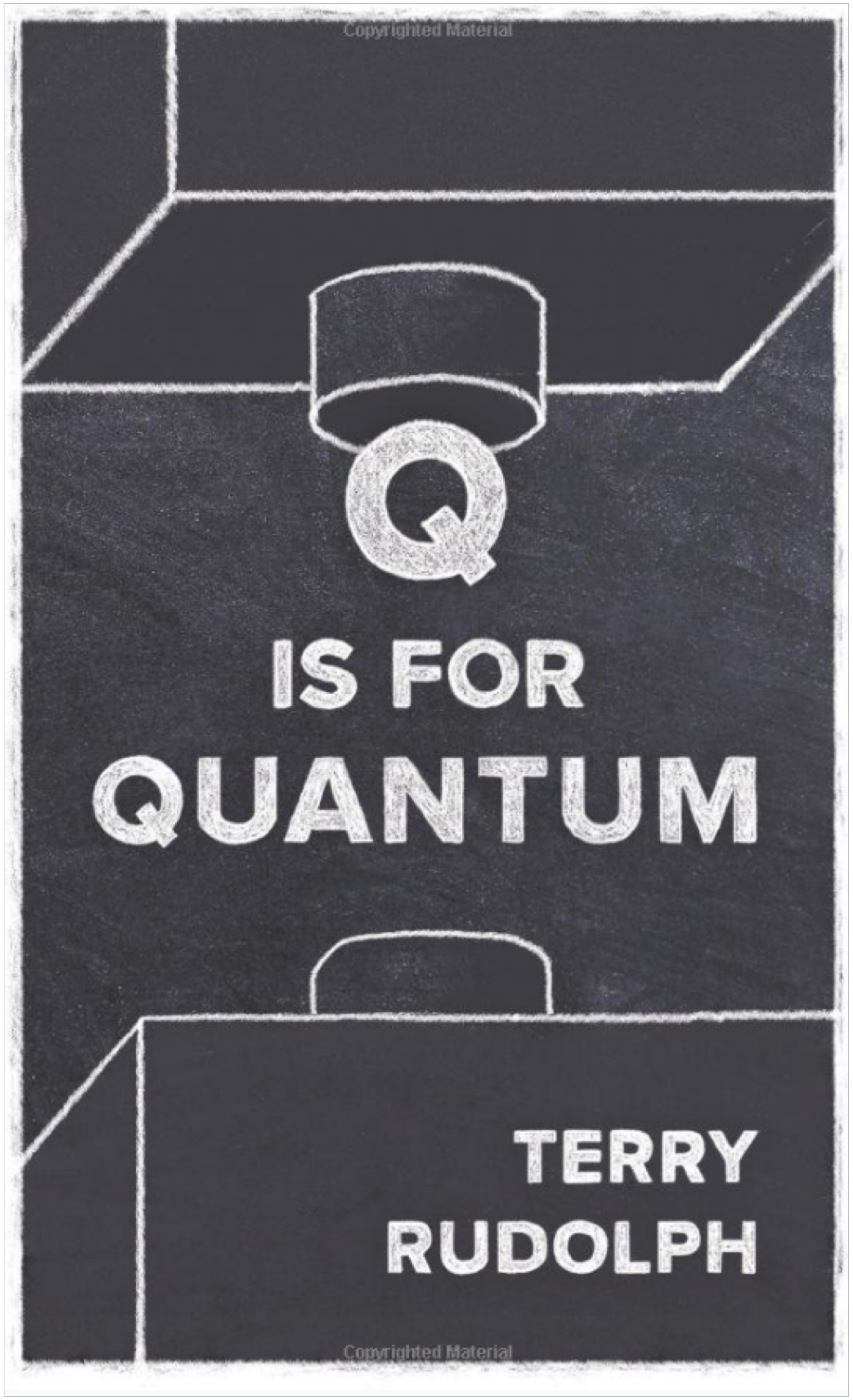

N=1



Terry Rudolphのアプローチ

“Q is for Quantum”

https://goo.gl/VZCZHq



This book has been written for my 15-year-old self.

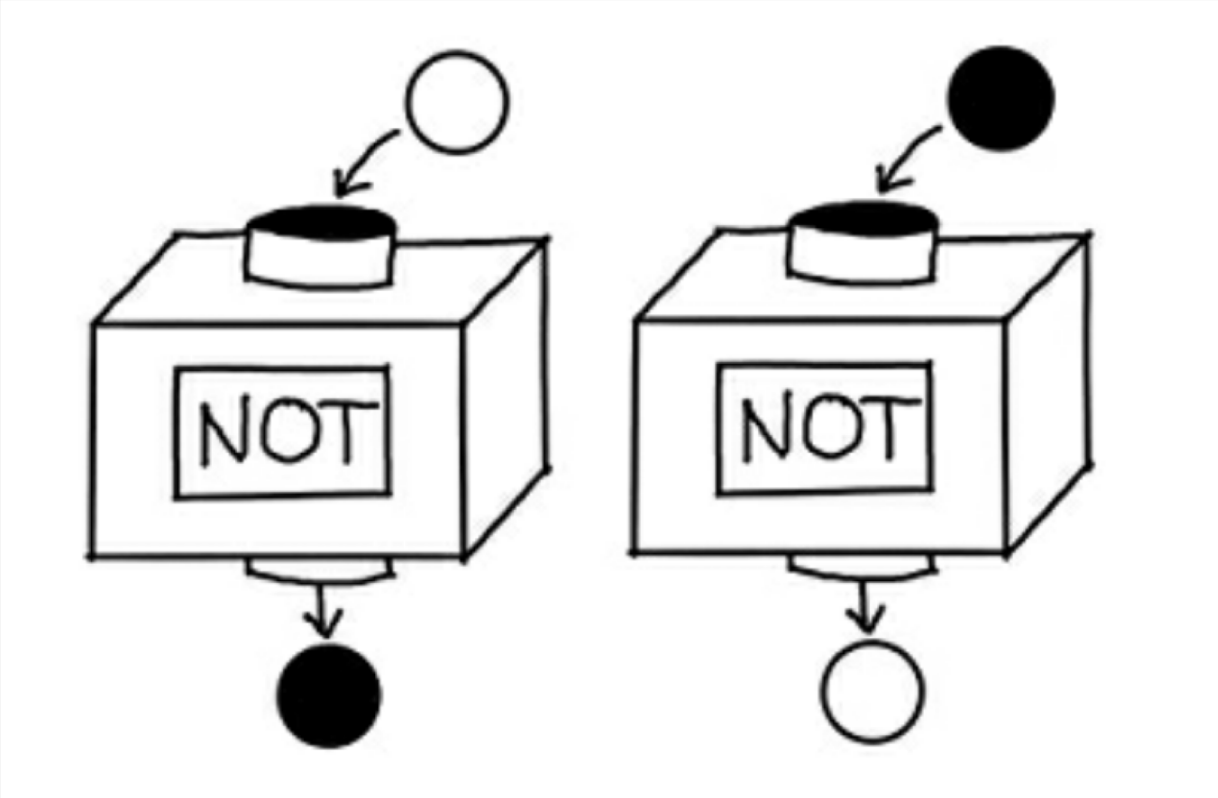
A fairly recent mathematical breakthrough (not by me) suggested a very different method of presenting some of the most interesting and weird phenomena of modern physics. Through my talks to teenagers I have found it is possible for students who know only arithmetic to quantitatively—not just qualitatively—understand the most important features of many of our deepest confusions about what is going on in the natural world. In fact, my nine-year-old nephew understood why there is a genuine mystery about what could "really be" happening inside the PETE boxes introduced in Part I and a few days later asked me whether I have solved it yet. Perhaps he wanted to solve it himself before leaving primary school.



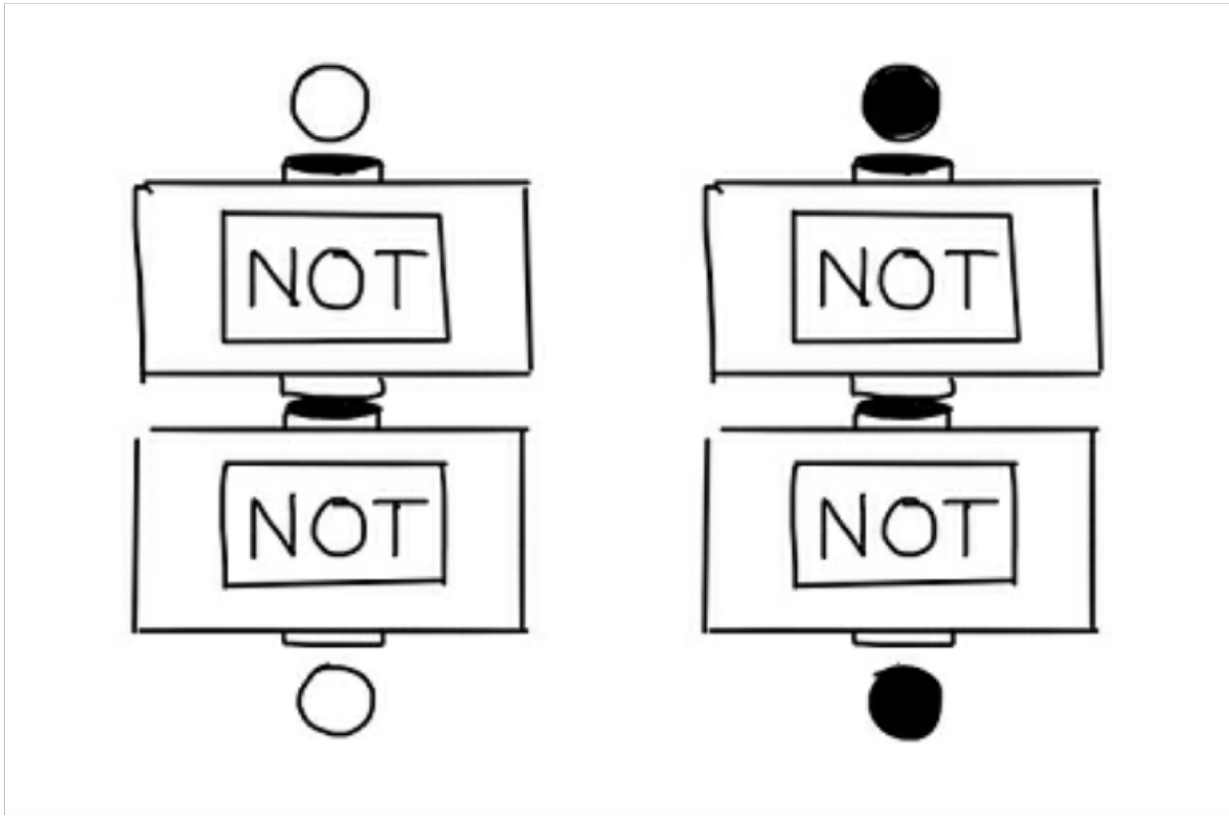
古典的な論理ゲート

Terry Rudolphは、まず、論理ゲートを、ボールを一つ入れるとボールが一つ出てくるボックスとしてイメージさせる。白または黒のボールを入れると、白または黒のボールが出てくるボックスだ。まずは、古典的なコンピュータのゲートを表すボックスの働きを見てみよう。

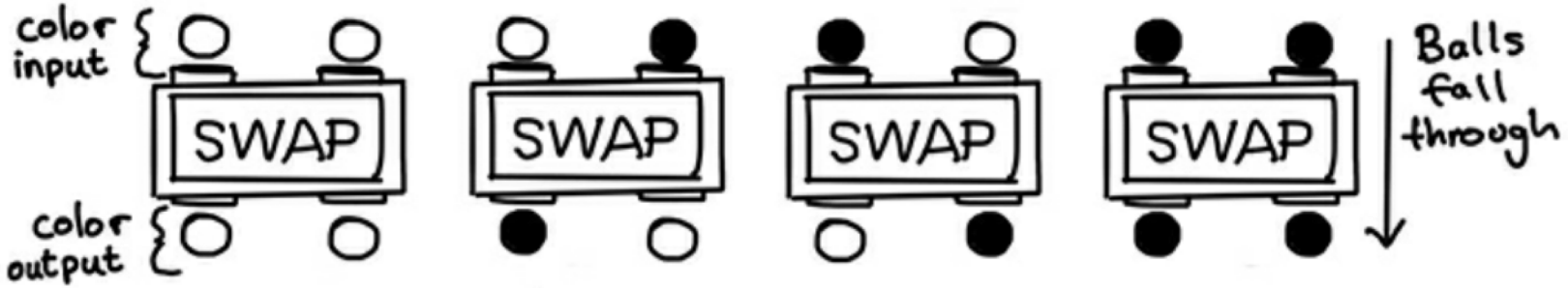
NOT ゲート



ゲートの結合（直列）

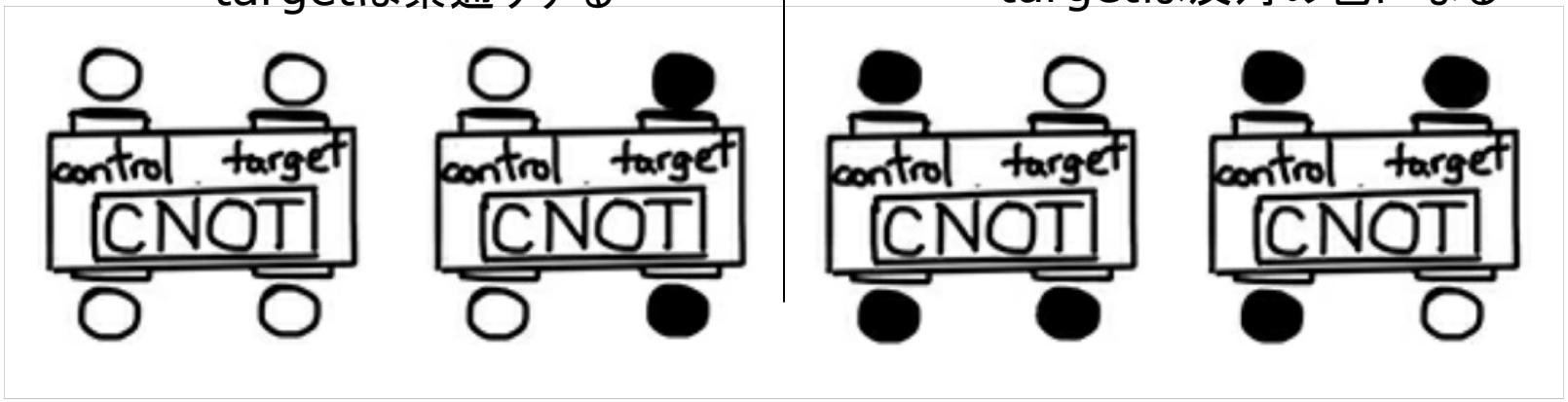


SWAPゲートとCNOTゲート



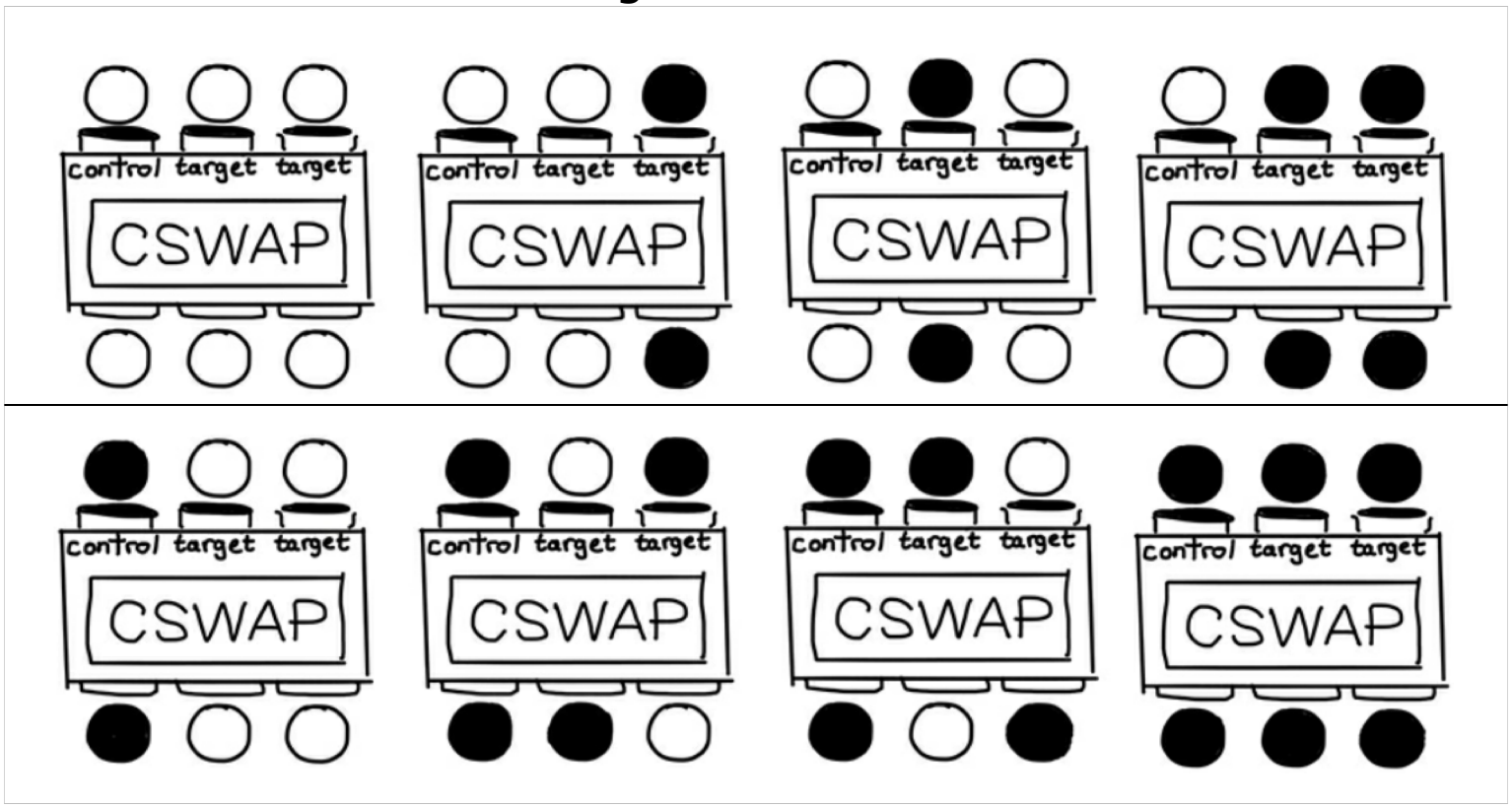
controlが白の時、
targetは素通りする

controlが黒の時、
targetは反対の色になる

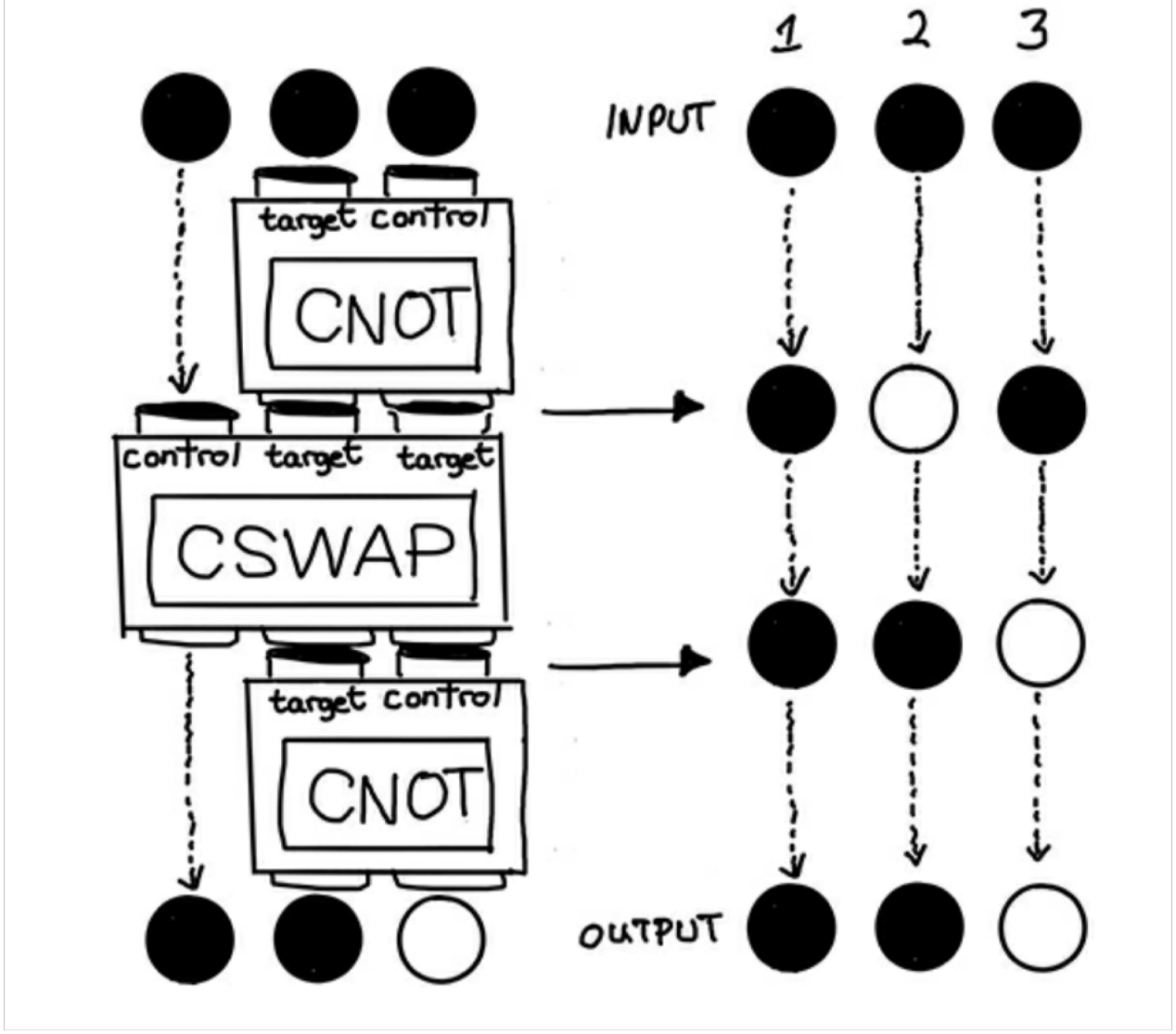


CSWAPゲート

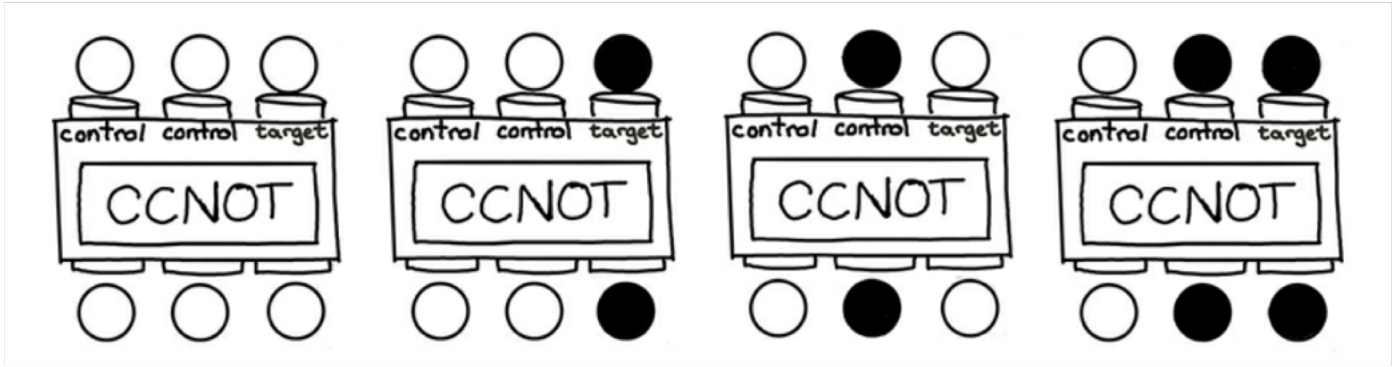
controlが白の時、
targetは素通りする

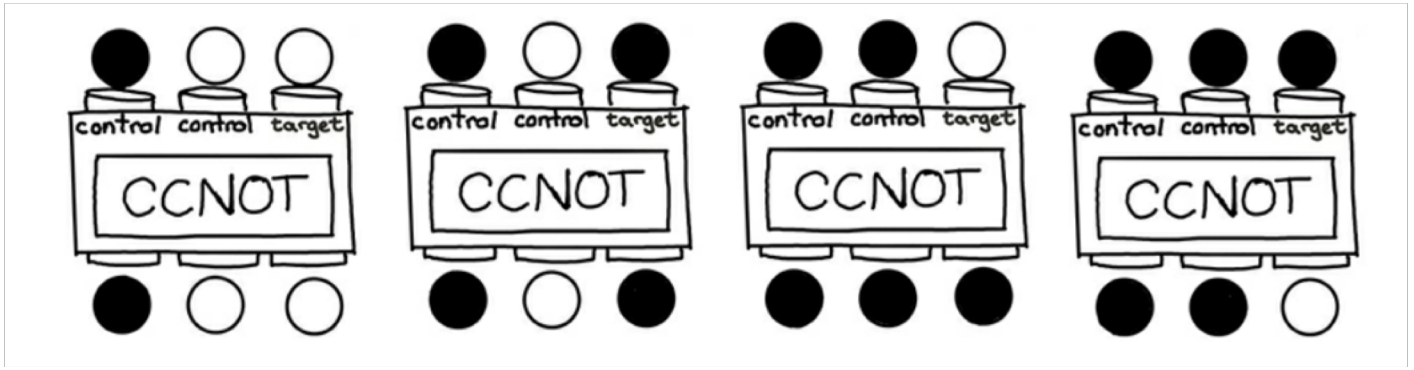


controlが黒の時、
targetはswapする

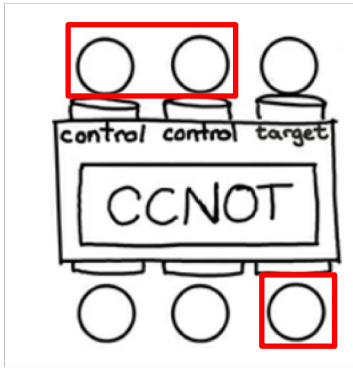

1
2
3
INPUT
target control
CNOT
control target target
CSWAP
target control
CNOT
OUTPUT

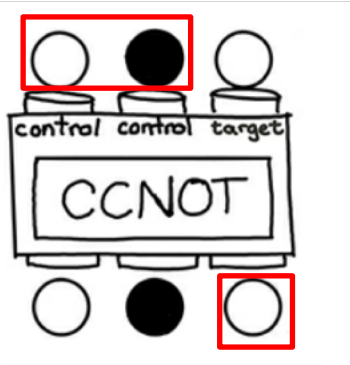
CCNOTゲート


control control target
CCNOT
control control target
CCNOT
control control target
CCNOT
control control target
CCNOT

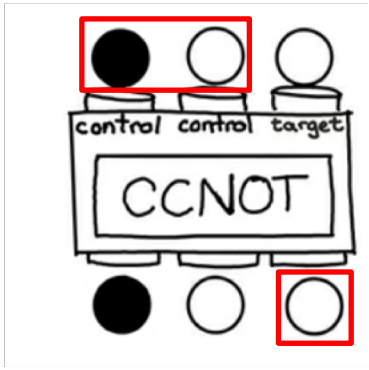

control control target
CCNOT
control control target
CCNOT
control control target
CCNOT
control control target
CCNOT

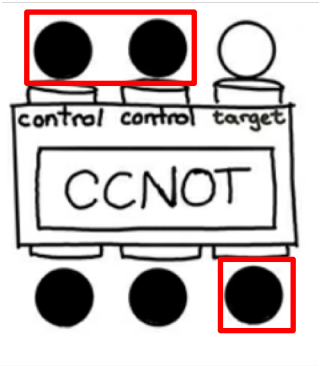
CCNOTゲート
target=白



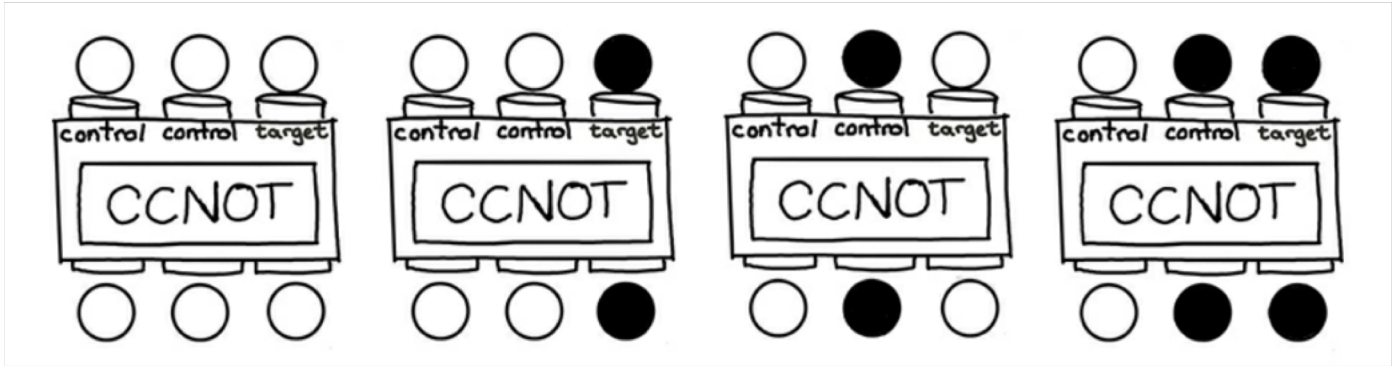


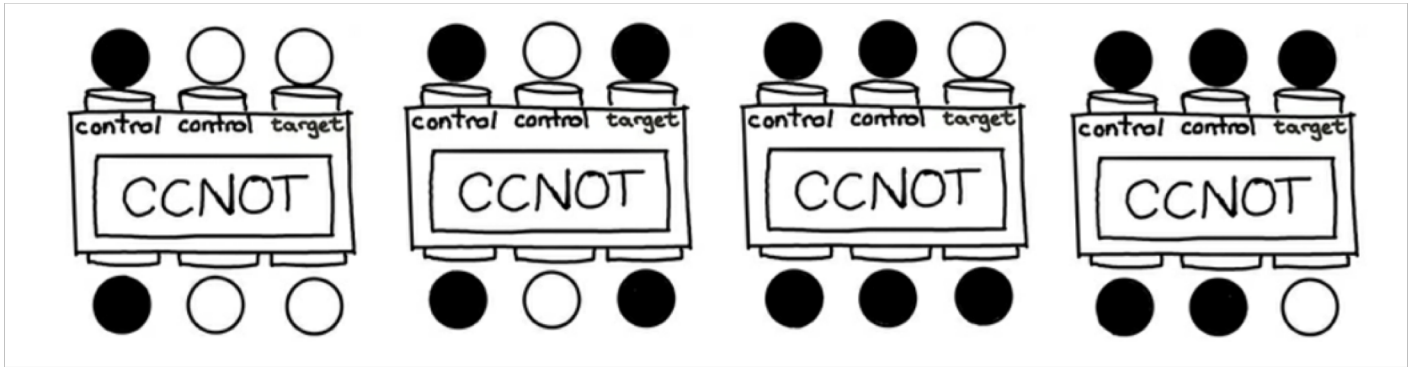
第一、第二ビットの
ANDゲートになる



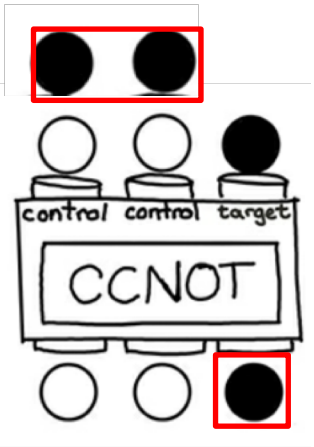


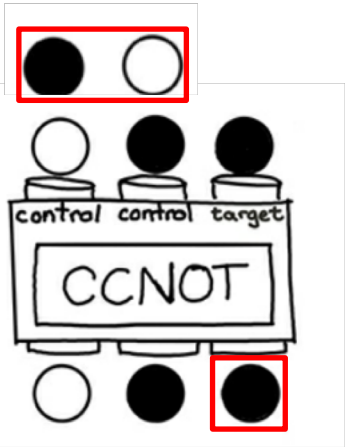
CCNOTゲート


control control target
CCNOT
control control target
CCNOT
control control target
CCNOT
control control target
CCNOT

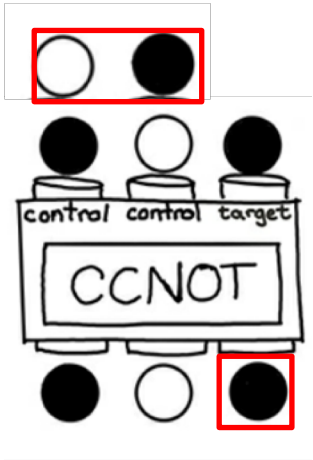

control control target
CCNOT
control control target
CCNOT
control control target
CCNOT
control control target
CCNOT

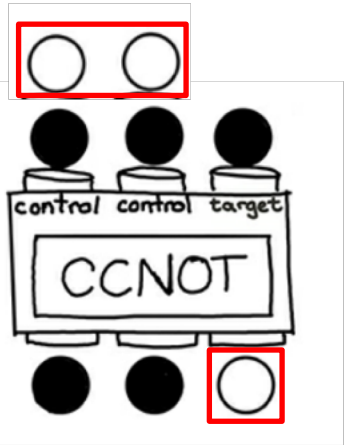
CCNOTゲート
target=黒、第一・第二反転





第一、第二ビットの
ORゲートになる



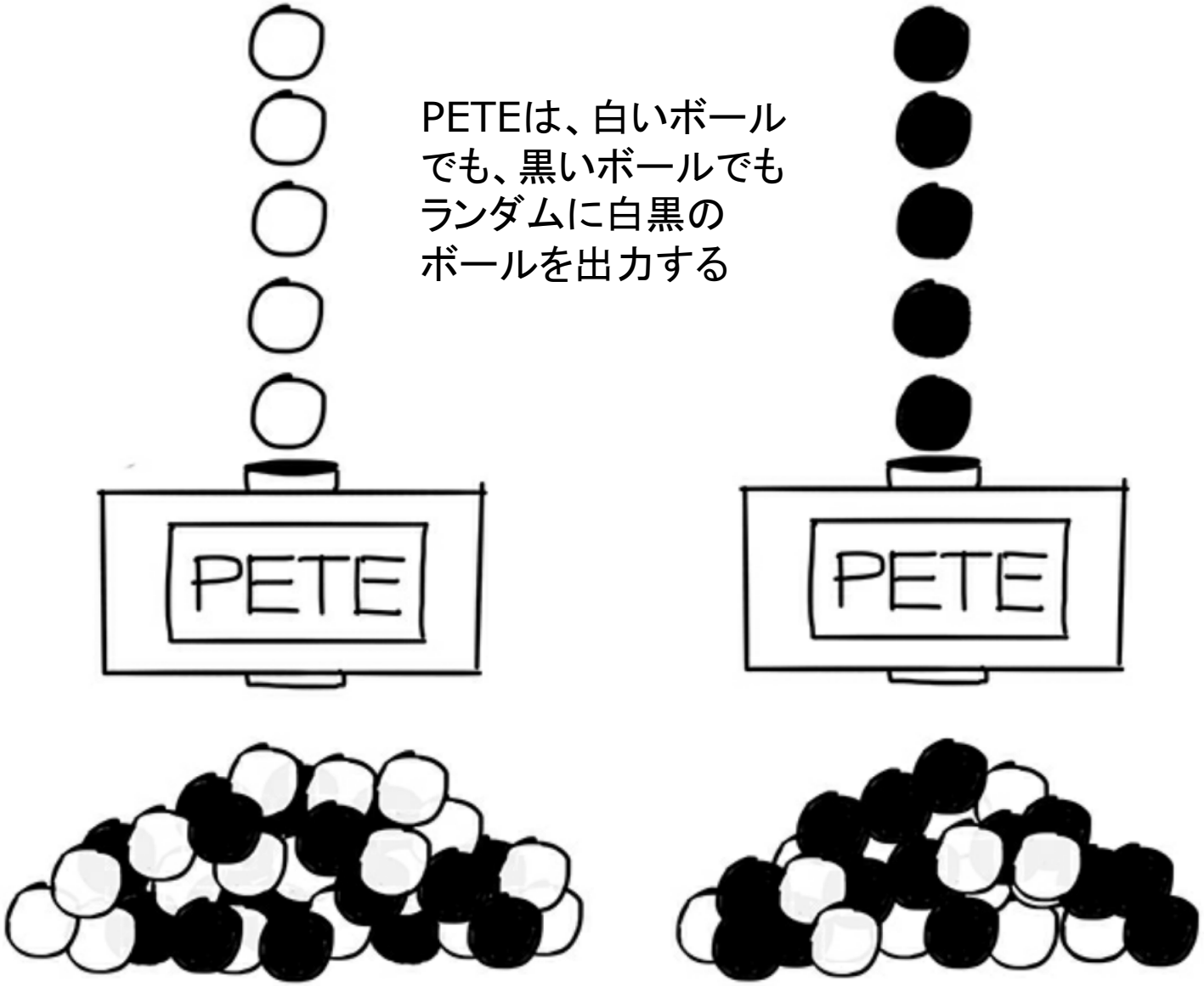




量子論理ゲートPETE

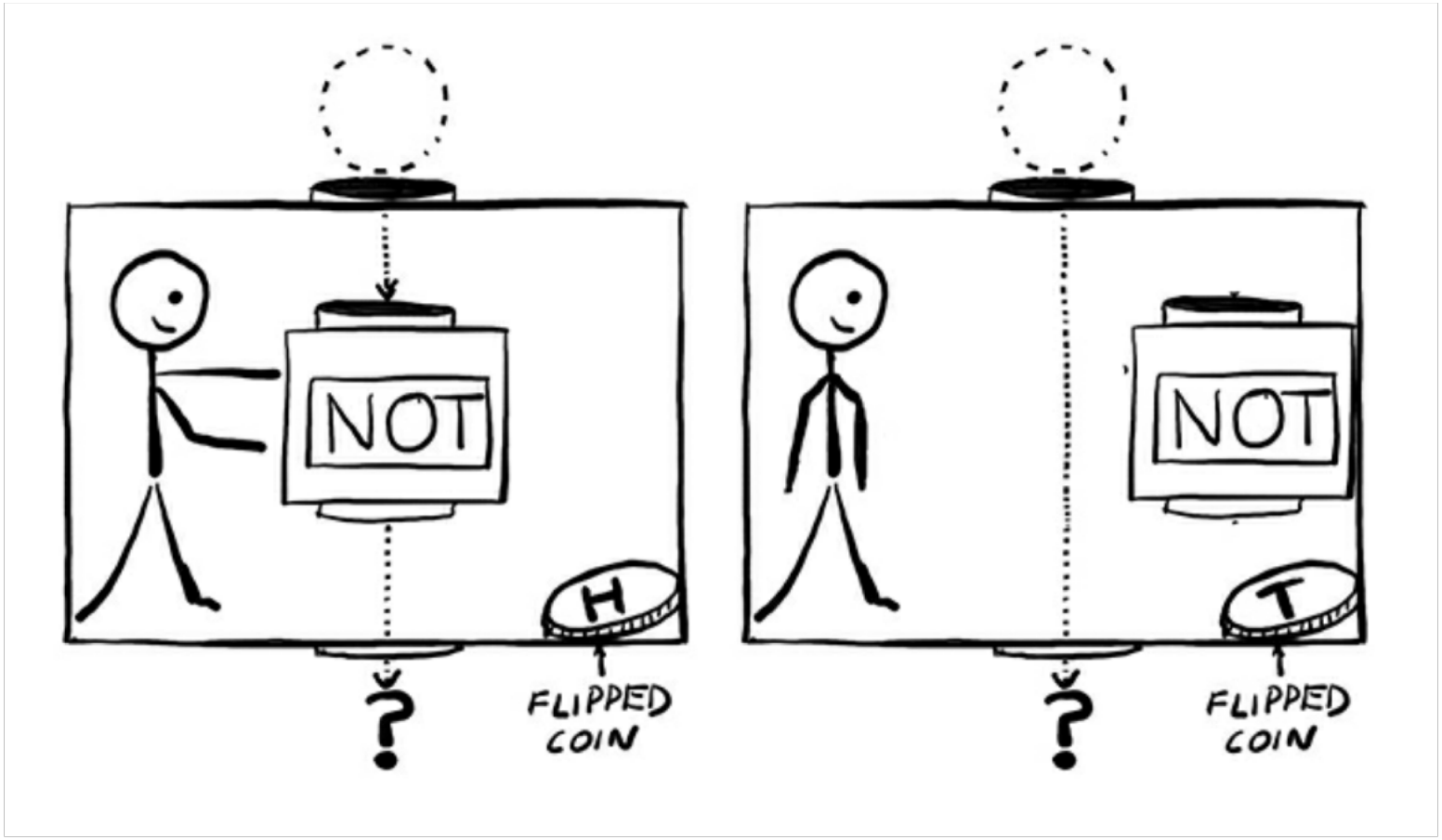
ここでは、古典的なゲートではない、PETEという名前の量子ゲートの働きを見てみよう

PETEは、白いボール
でも、黒いボールでも
ランダムに白黒の
ボールを出力する

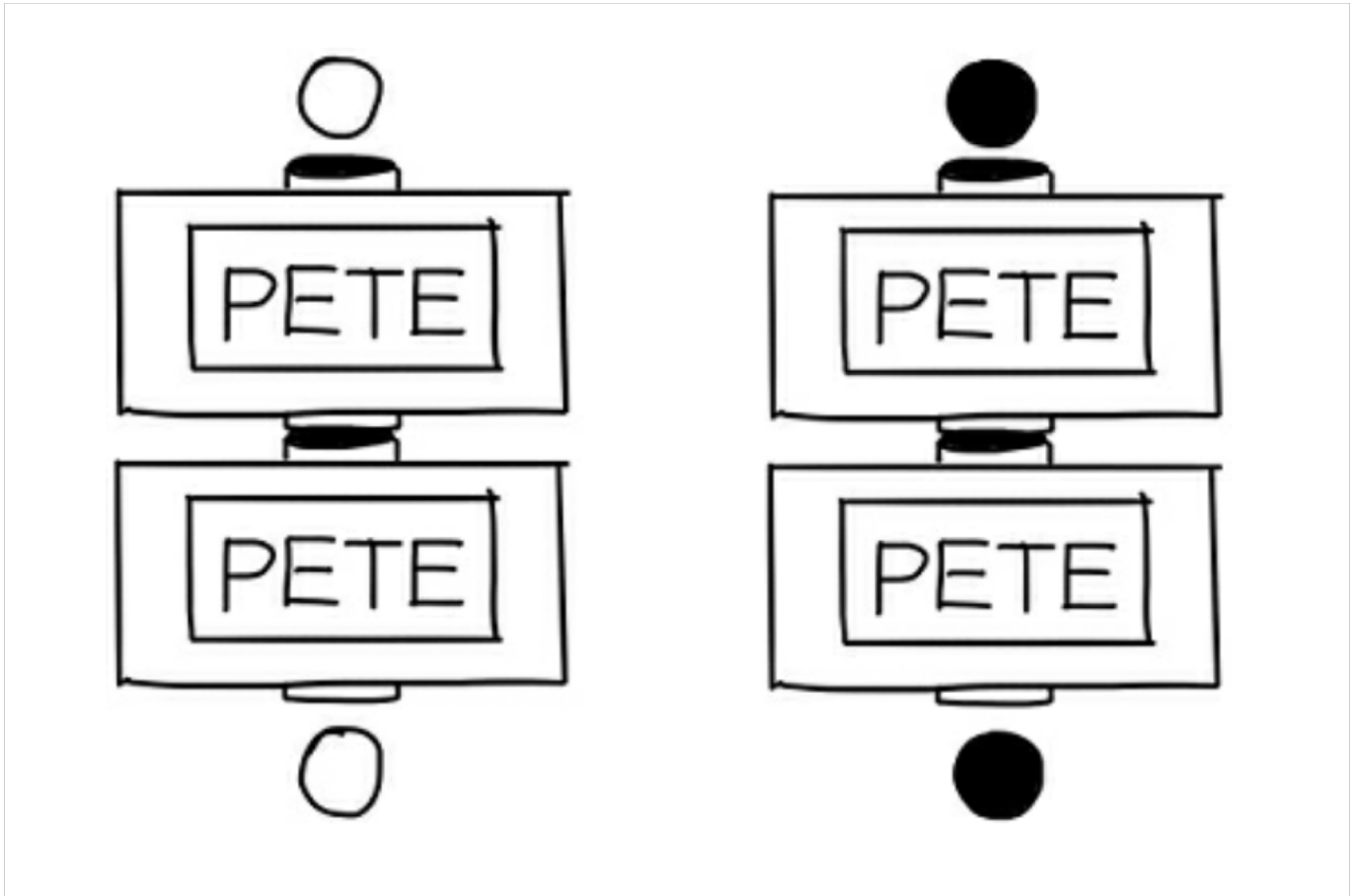


PETEの中身？

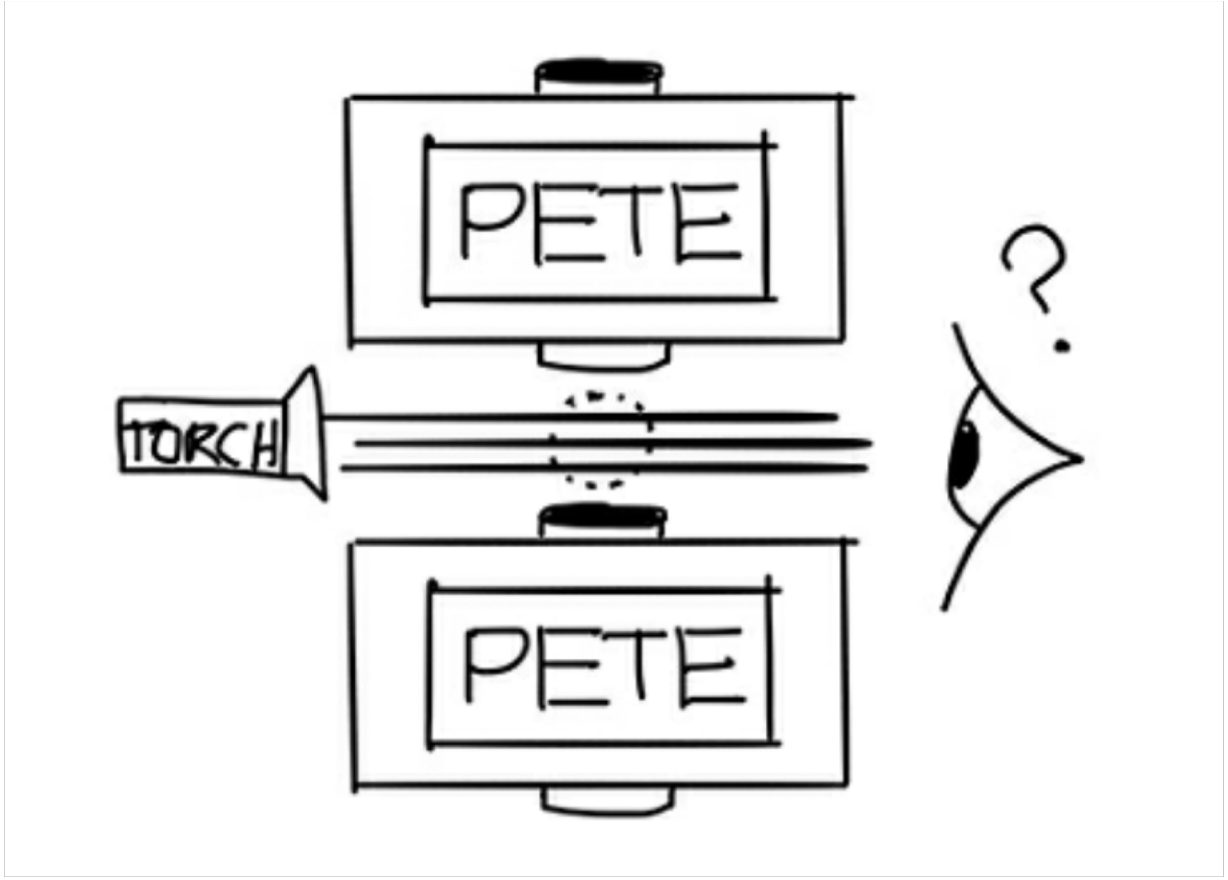
PETEの中に人がいて、コインを投げて
表だったらNOTゲートを適用し、
裏だったら素通しにすると考えれば
先の出力は説明できる。



ところが、こうなるという。なぜ？



上と下の間をチェックする

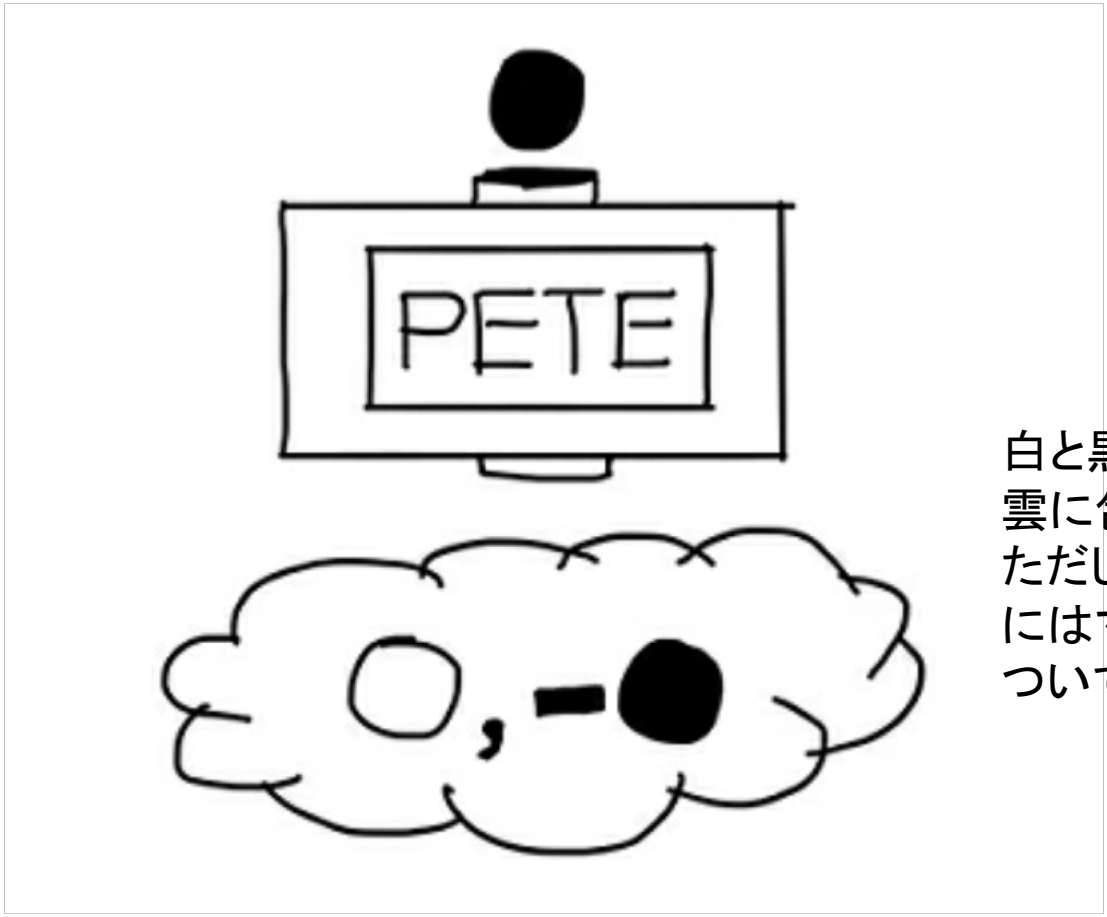


次のように考えればいい
白が入力した場合のPETEの出力　新しい状態

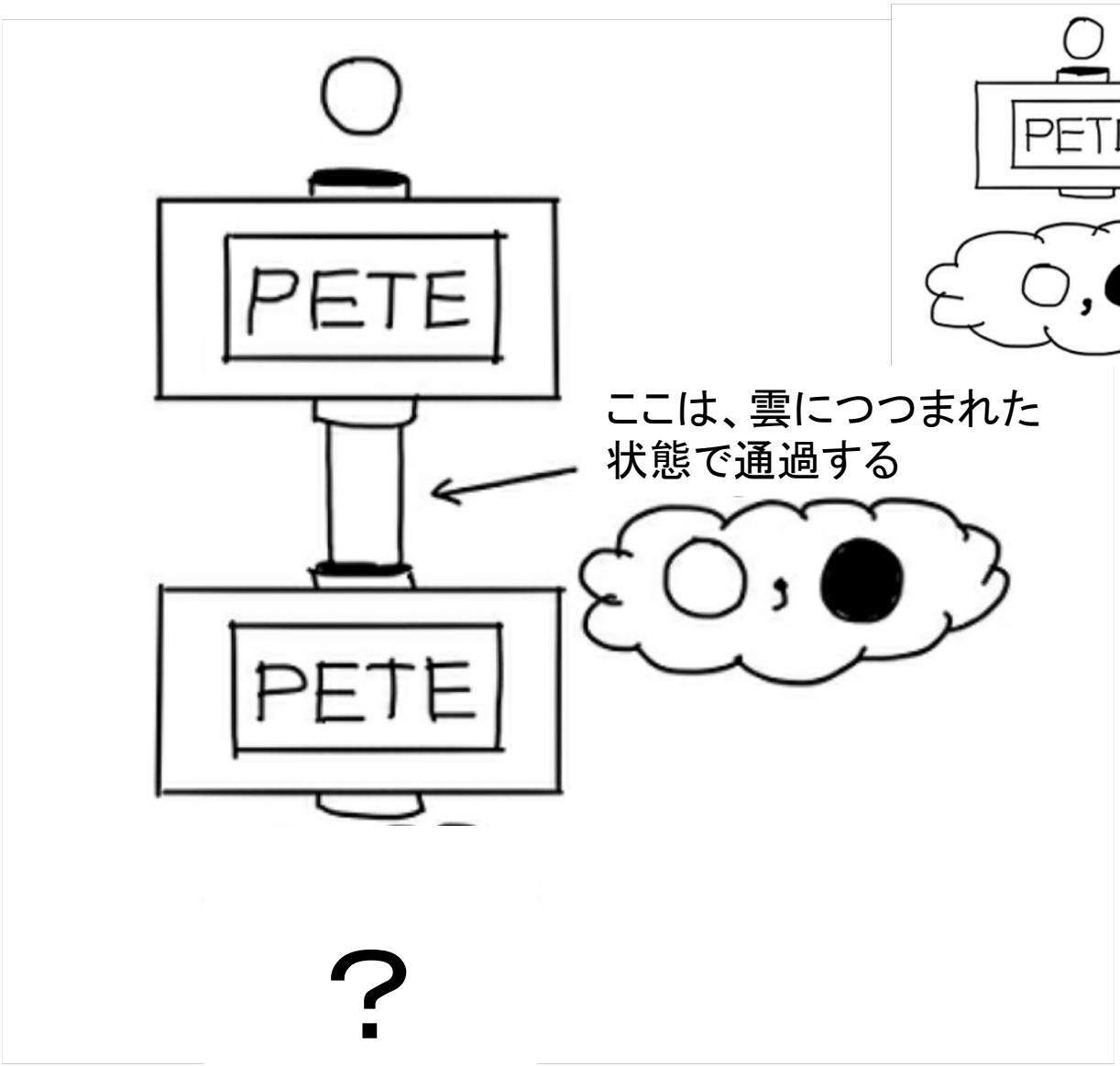


白と黒のボールが、
雲に包まれて出てくる

黒が入力した場合のPETEの出力　新しい状態



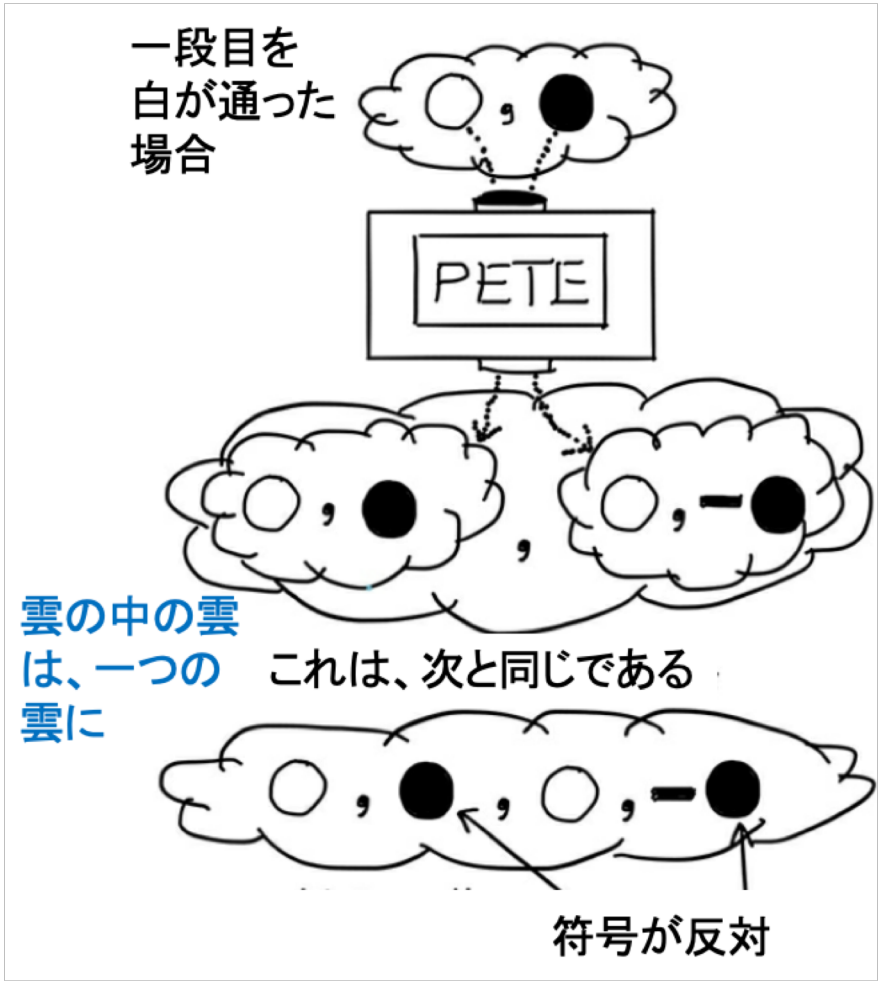
白と黒のボールが、
雲に包まれて出てくる
ただし、黒のボール
にはマイナスの符号が
ついている


PETE
PETE
PETE
ここは、雲につつまれた
状態で通過する
?

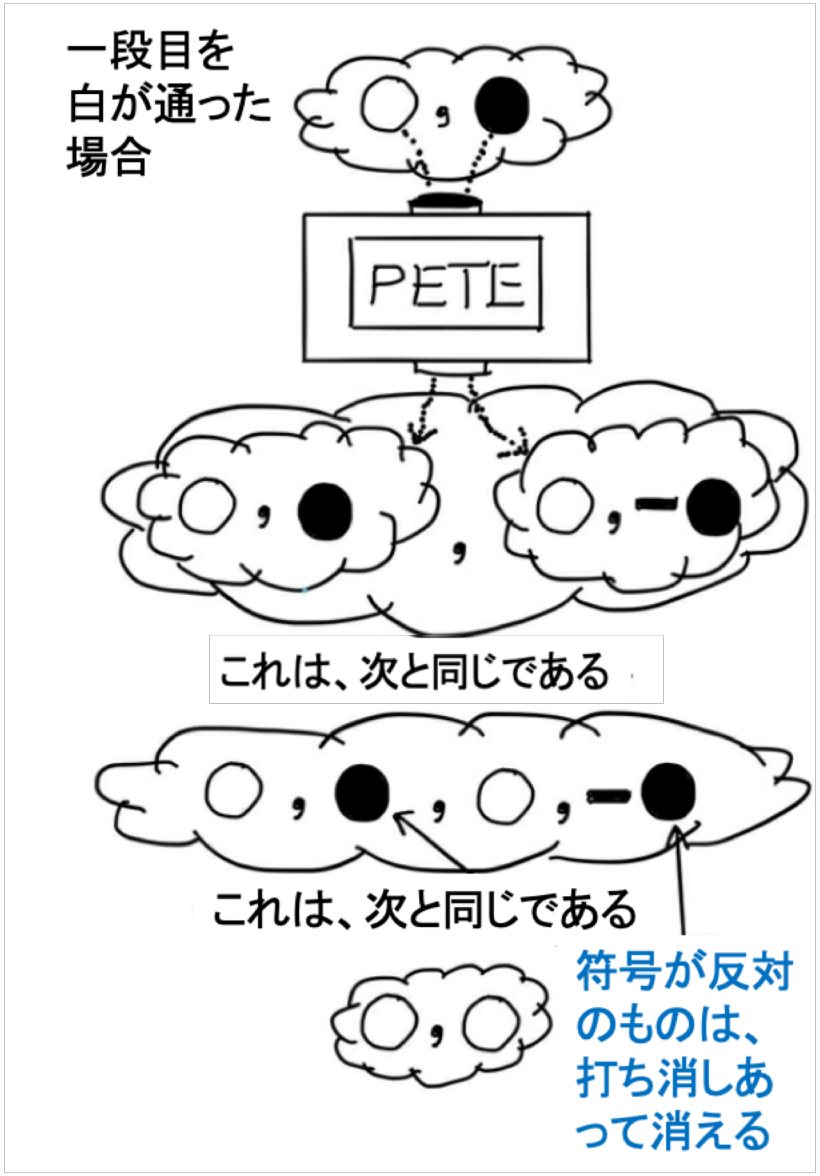
二段目のPETEの働き



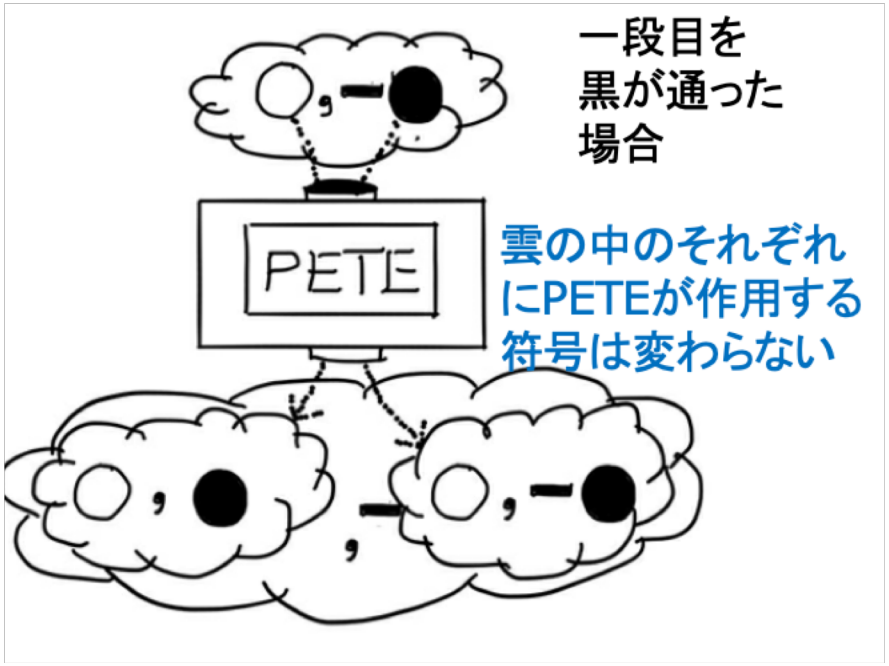
二段目のPETEの働き



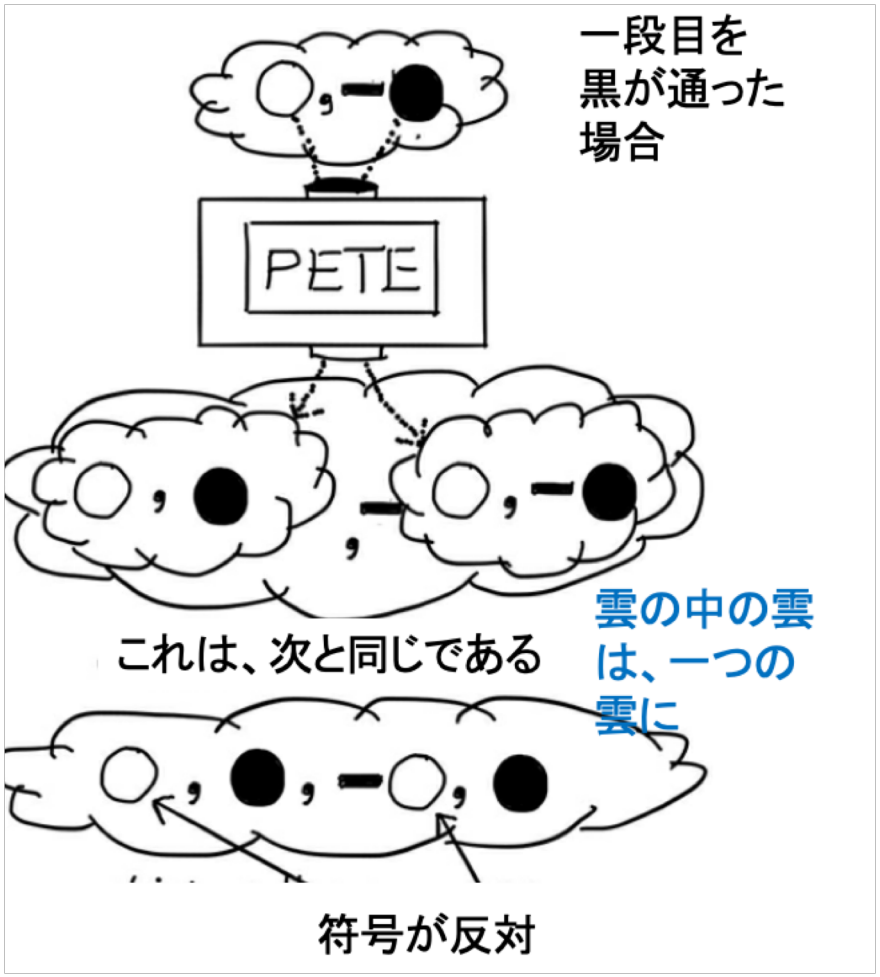
二段目のPETEの働き



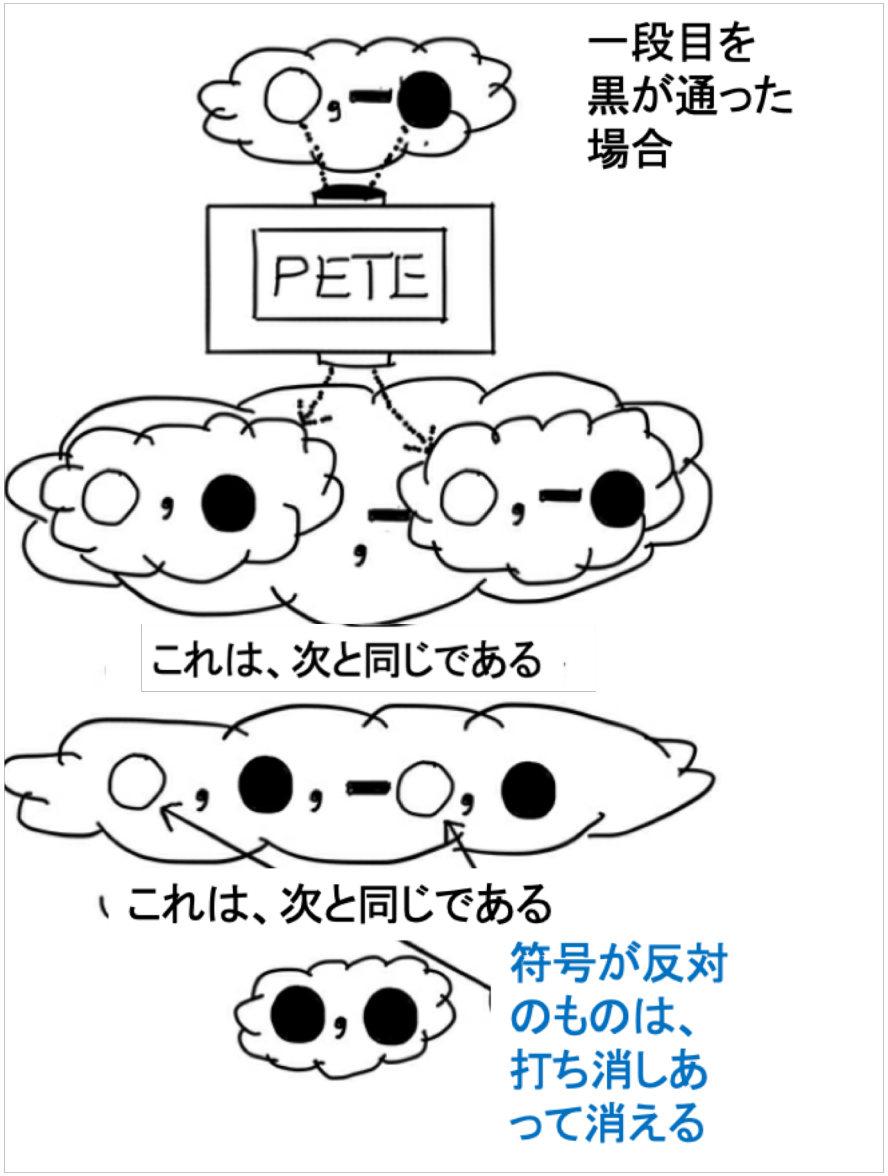
二段目のPETEの働き

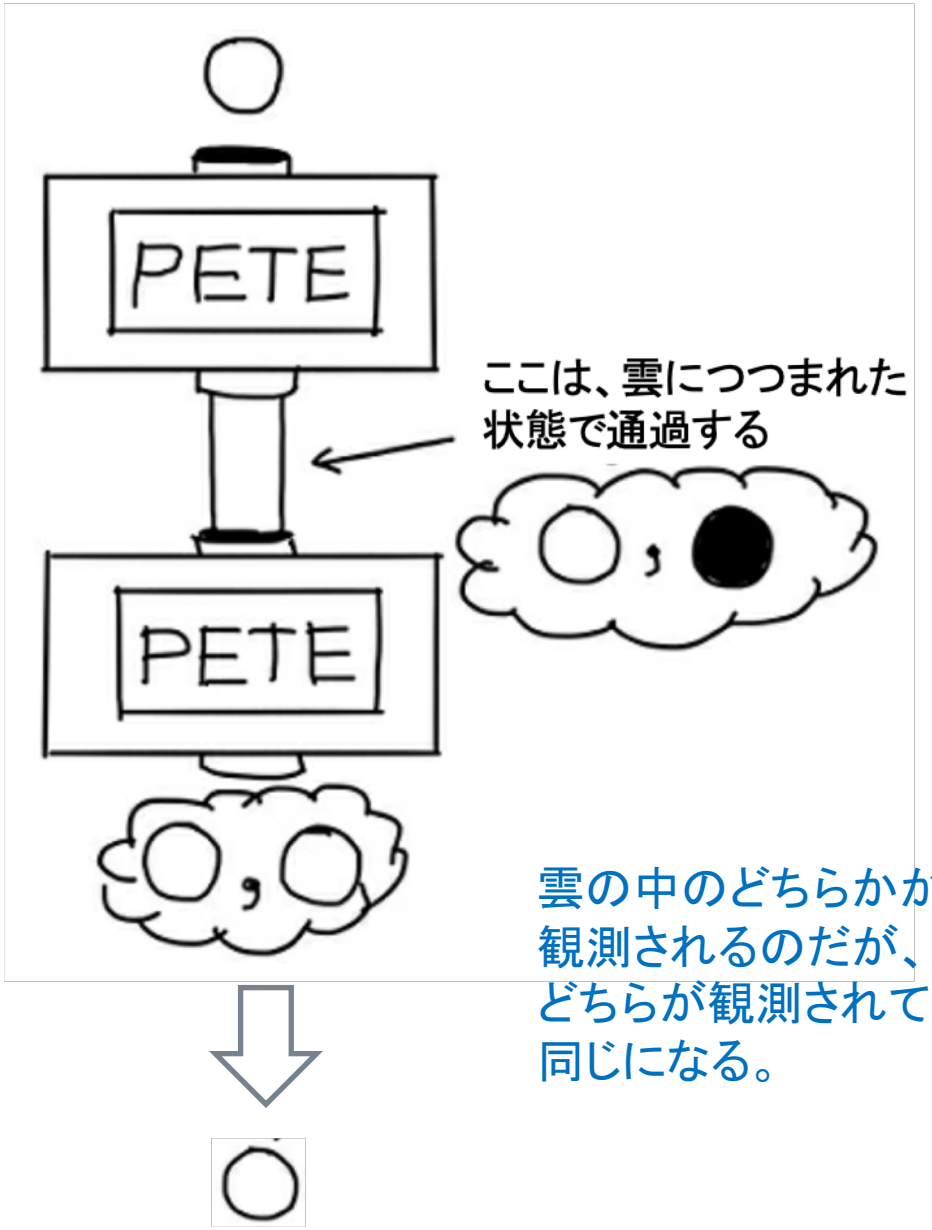


二段目のPETEの働き

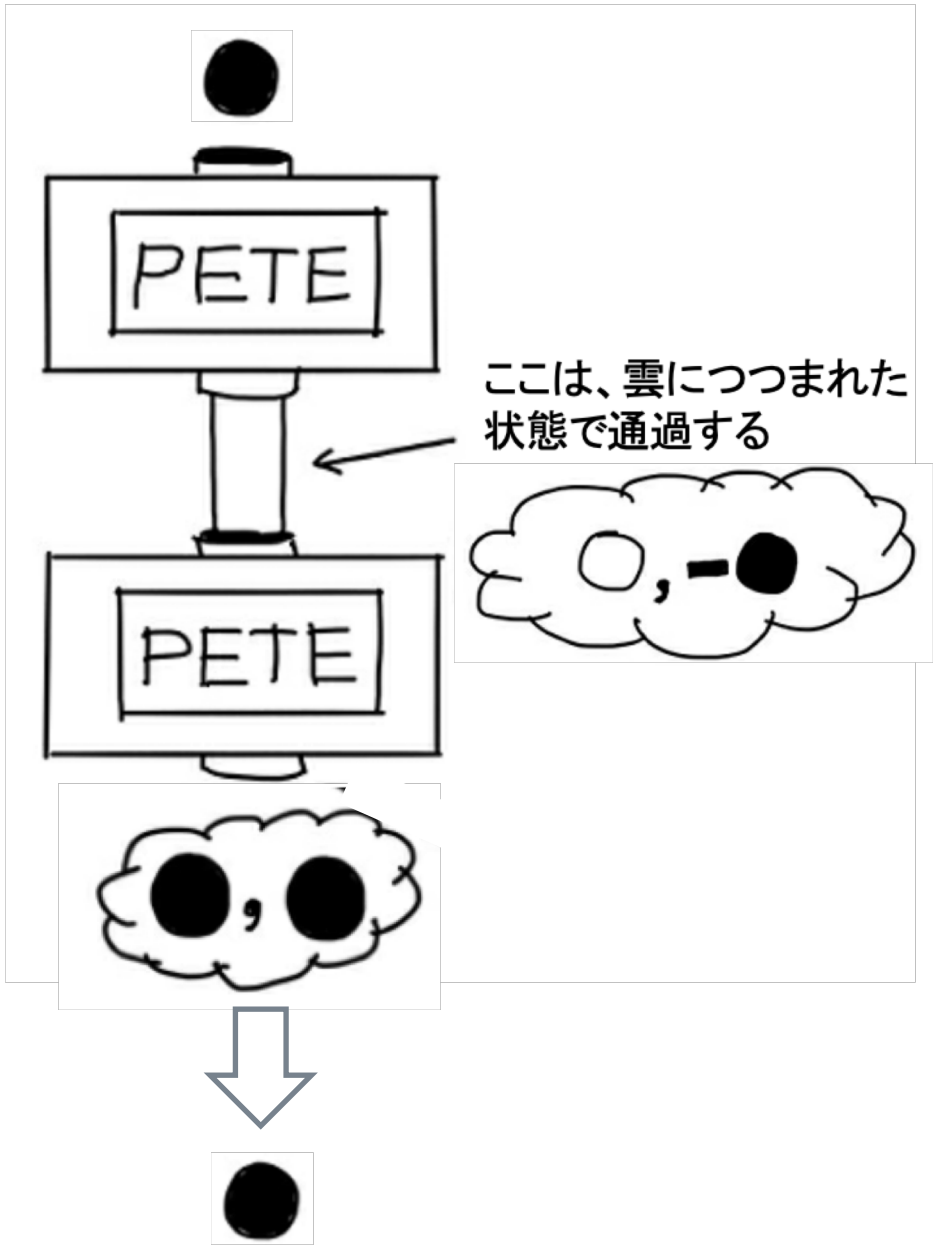


二段目のPETEの働き





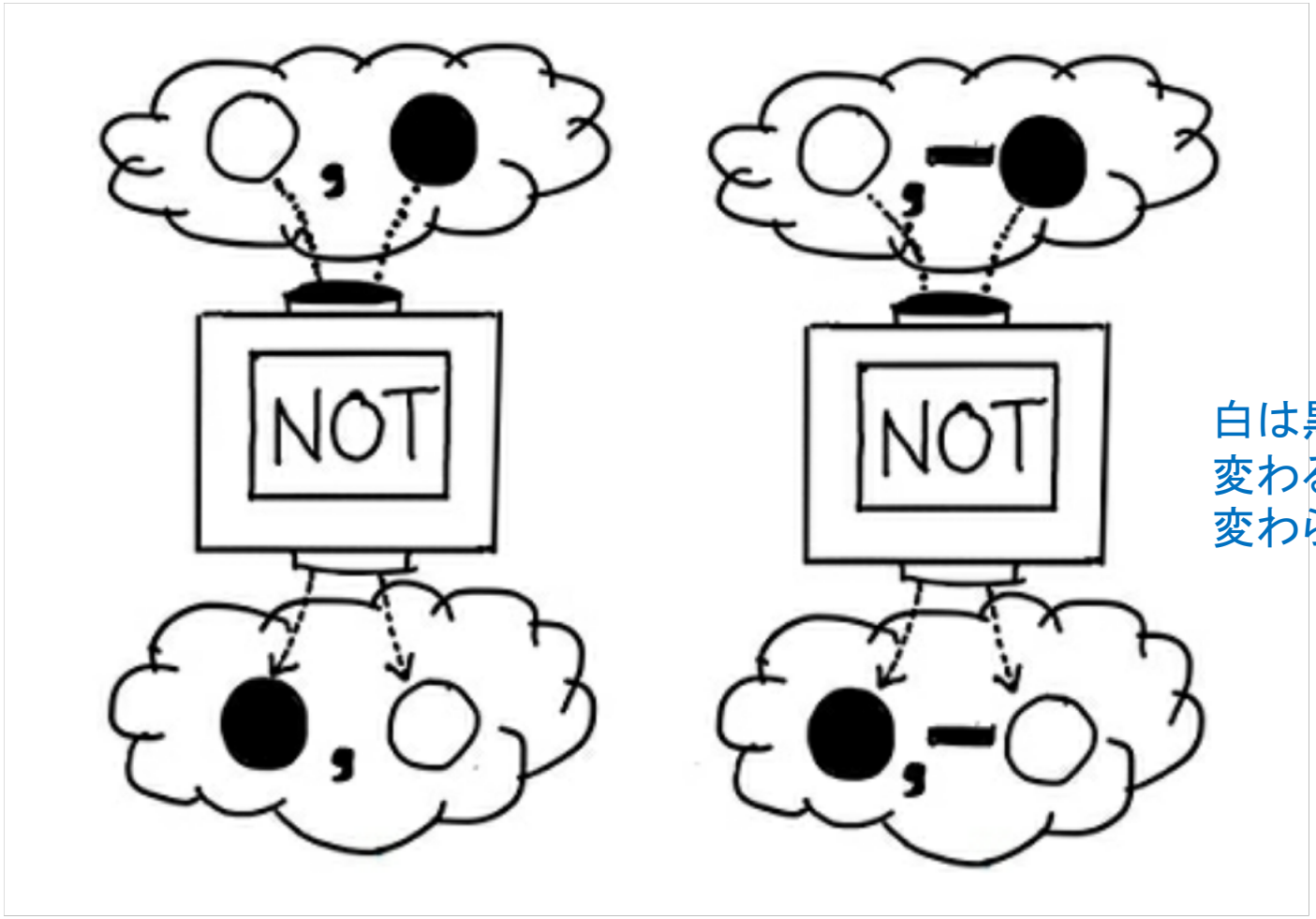
雲の中のどちらかが
観測されるのだが、
どちらが観測されても
同じになる。



量子論理ゲートのイメージ

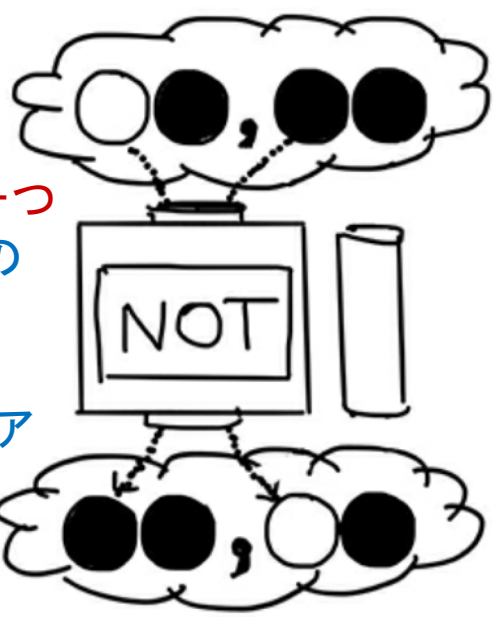
量子NOTゲート、量子CNOTゲートを導入して、量子ゲートPETEとの組み合わせを考える

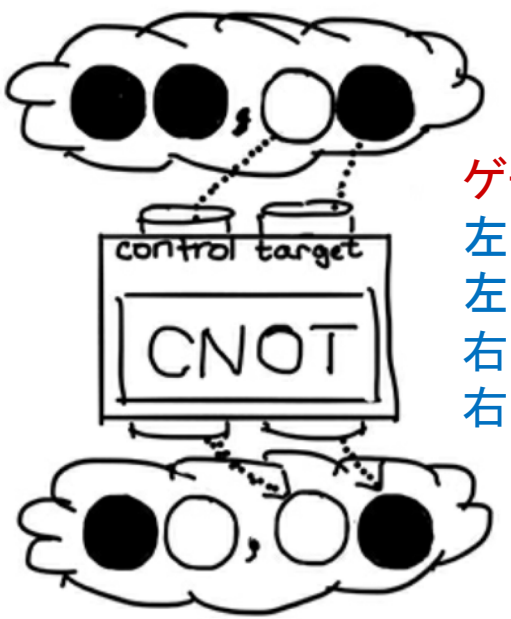
量子NOTゲート



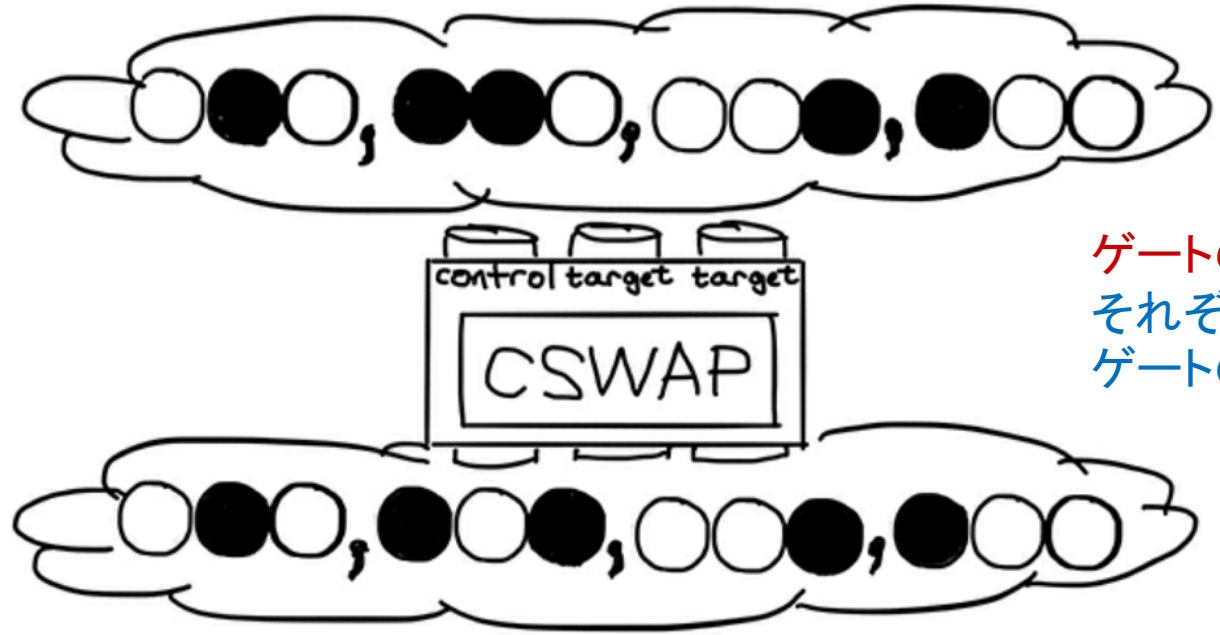
白は黒に、黒は白に
変わる。ただし、符号は
変わらない。

ゲートの入り口が一つ
左の一個がゲートの
作用を受けるが、
右のは、そのまま
通過して、再び、ペア
を作る。



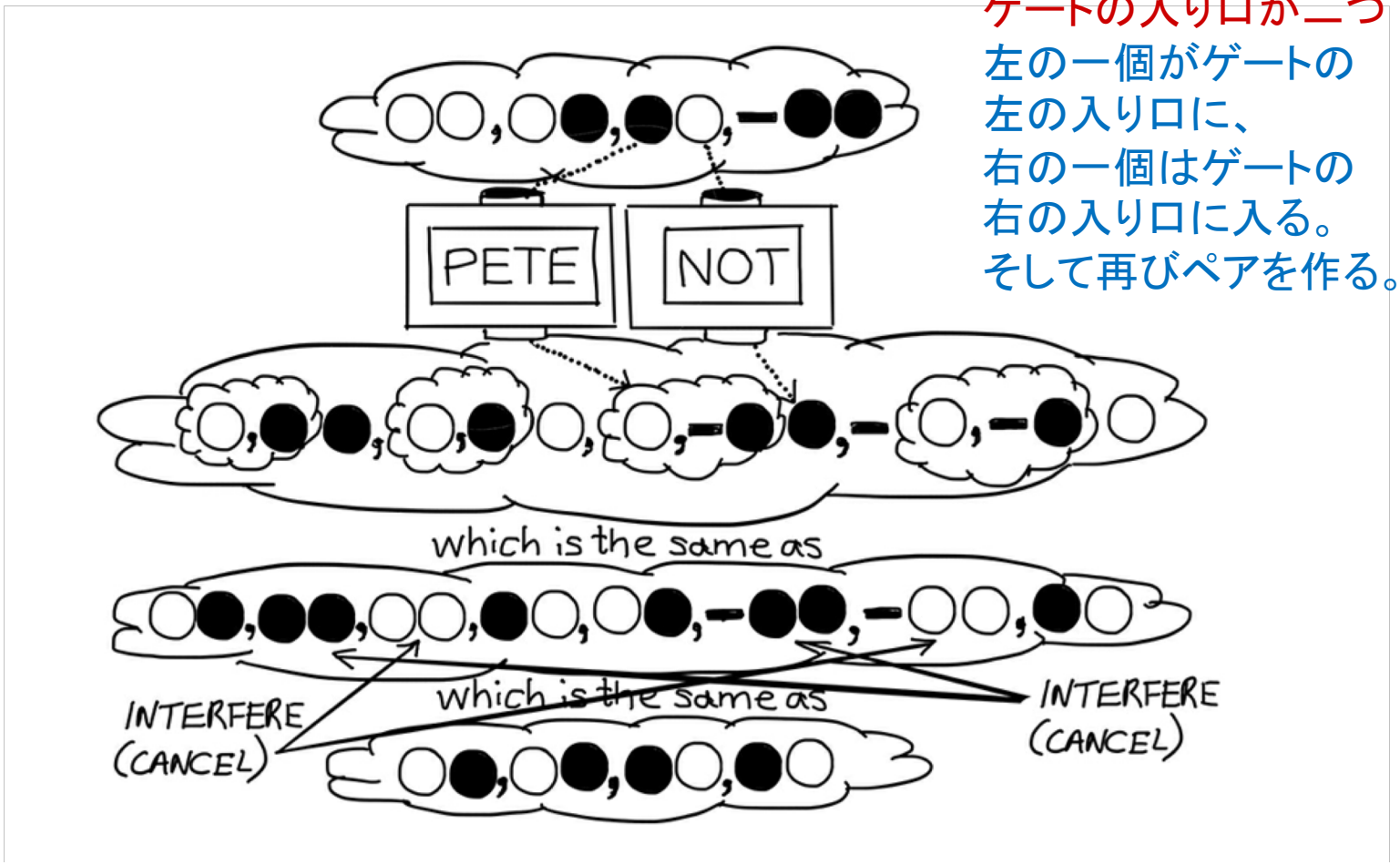


ゲートの入り口が二つ
左の一個がゲートの
左の入り口に、
右の一個はゲートの
右の入り口に入る。



ゲートの入り口が三つ
それぞれが対応する
ゲートの入り口に入る。

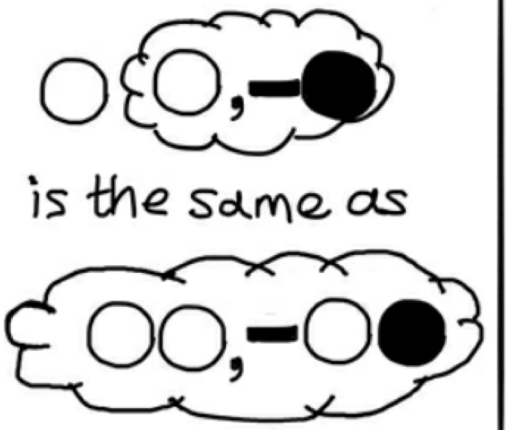
PETEと論理回路の組み合わせ



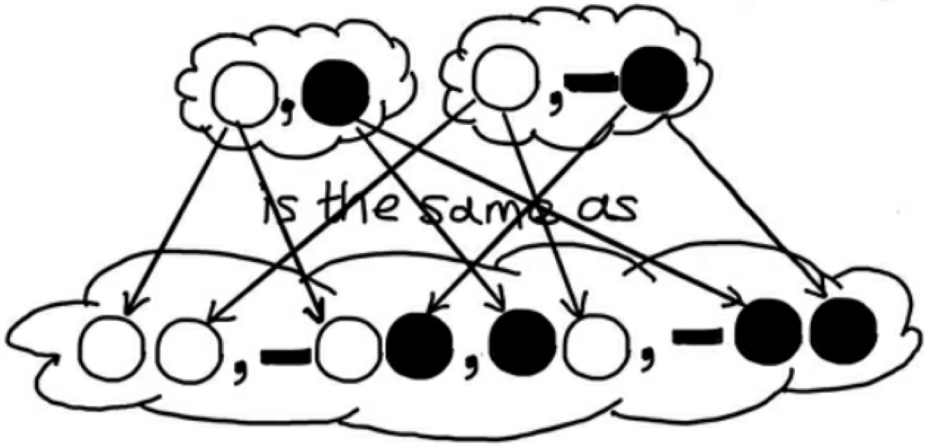
ゲートの入り口が二つ
左の一個がゲートの
左の入り口に、
右の一個はゲートの
右の入り口に入る。
そして再びペアを作る。

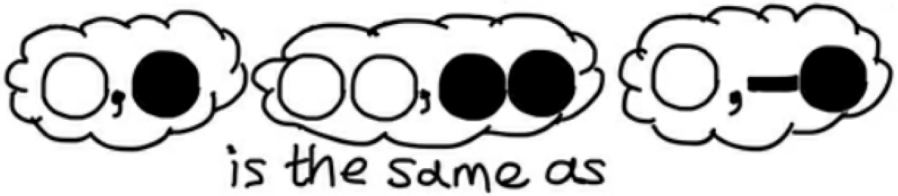
雲とのペアは展開される

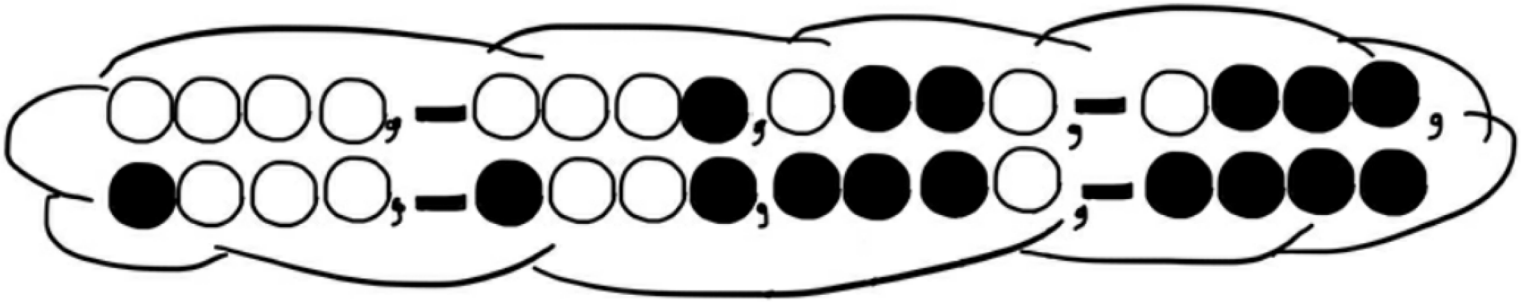
a(b+c)=ab+ac



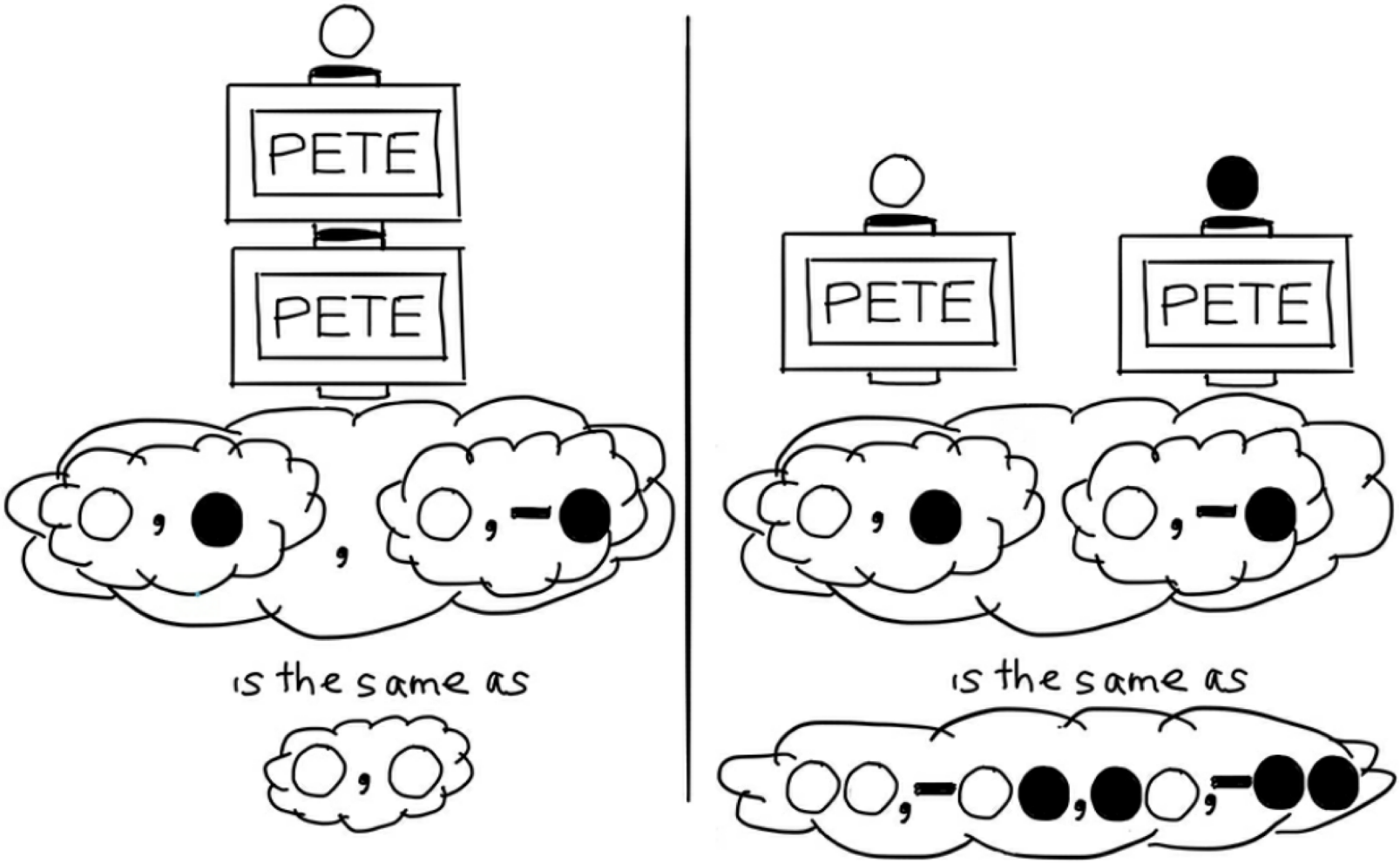
(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd



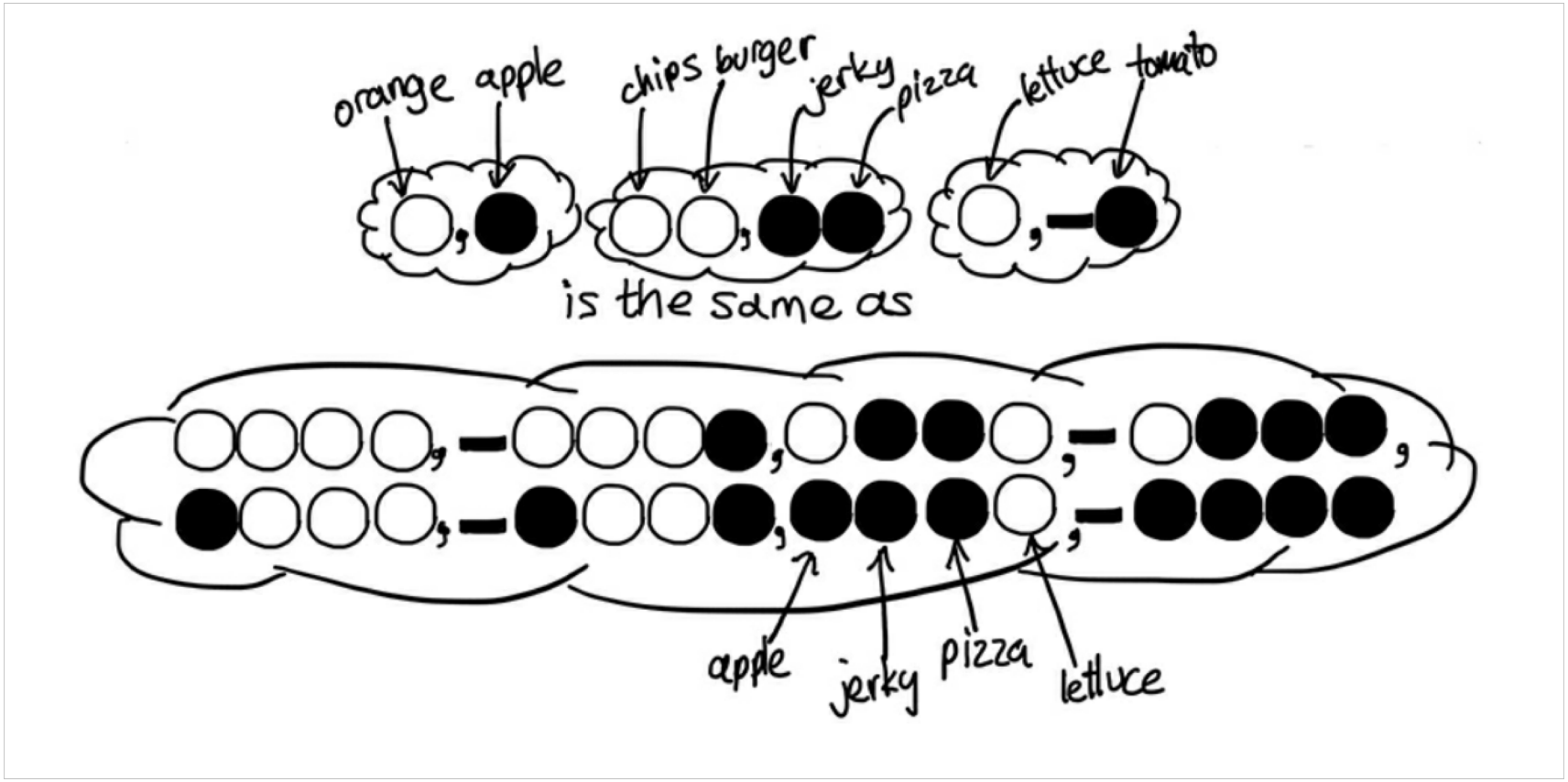




(a+b)(c+d)(e+f)= ….


PETE
PETE
is the same as
PETE
PETE
is the same as

飲み物と食べ物とサラダと組み合わせと同じ



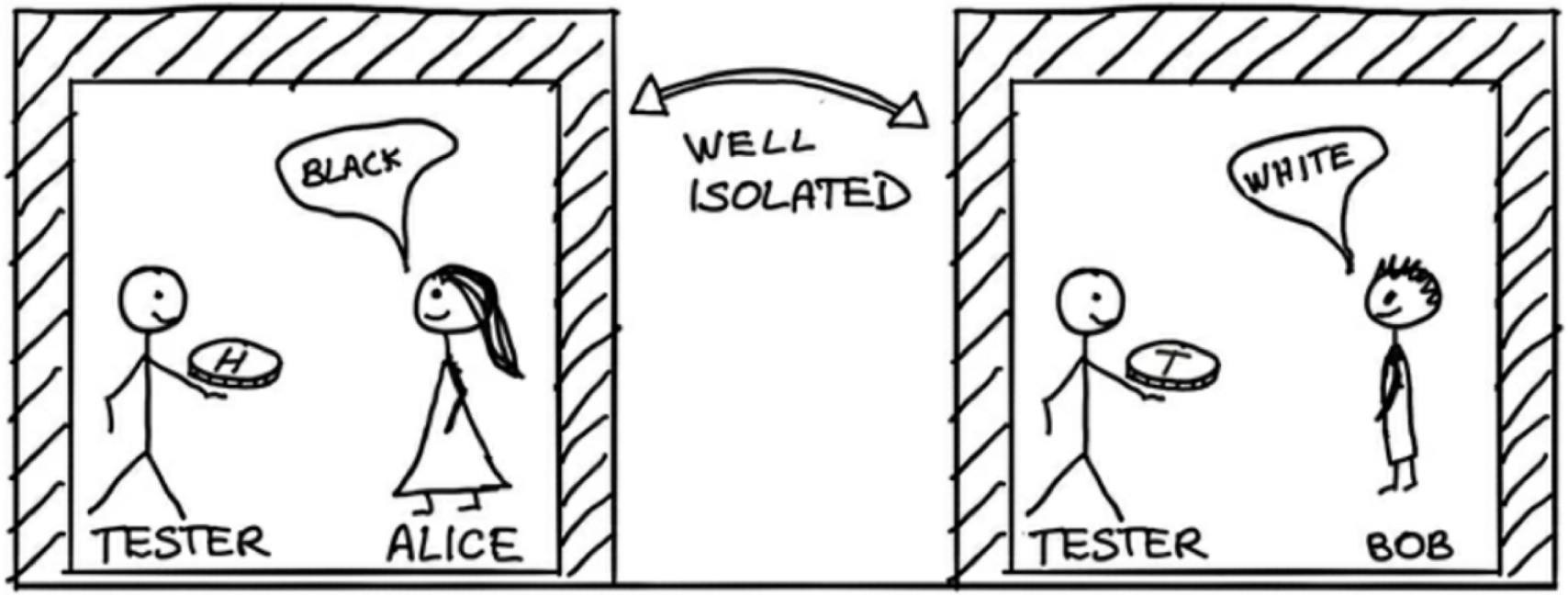

超能力者ゲーム
“Q is for Quantum”
https://goo.gl/VZCZHq

ゲームの概要

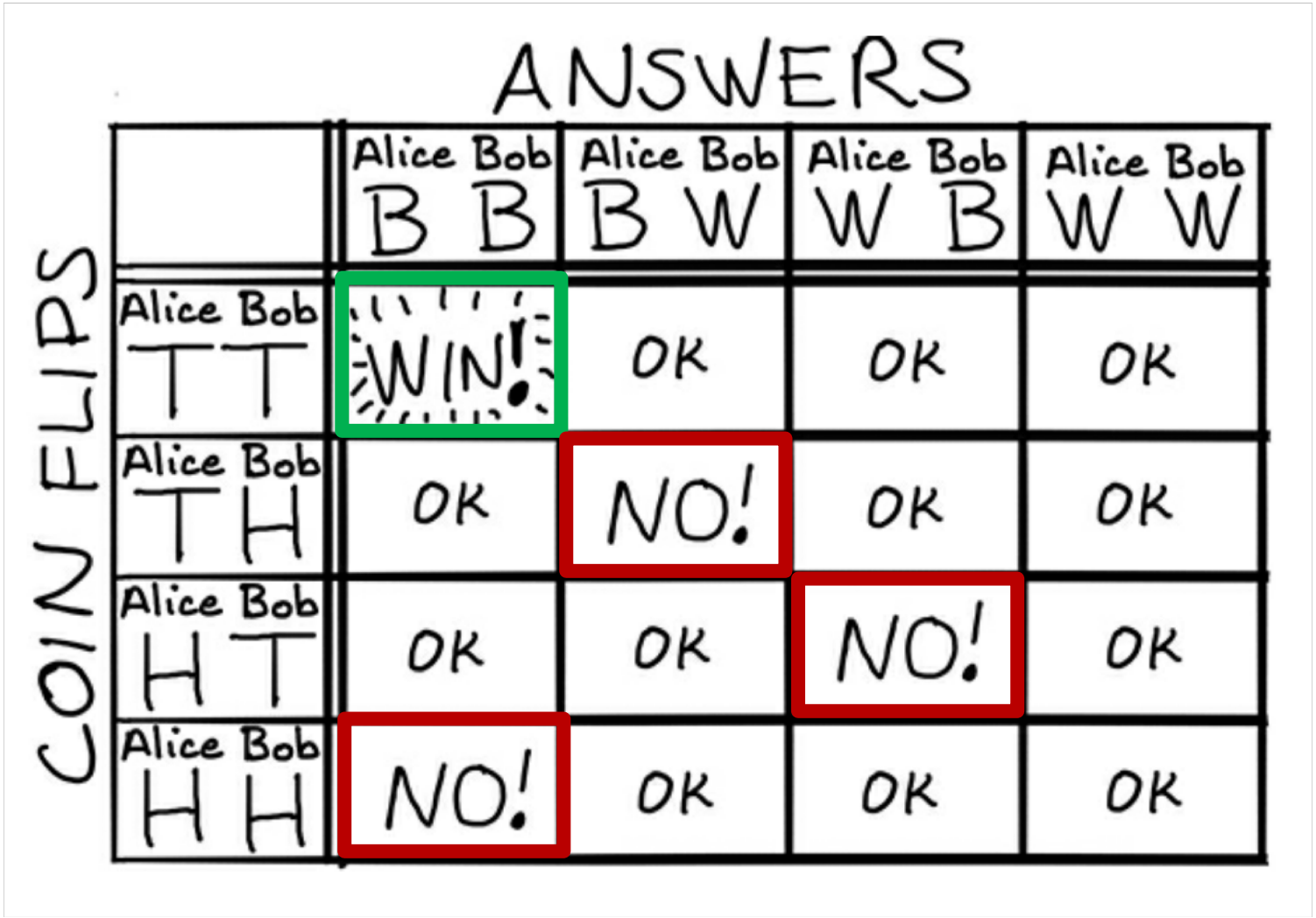
ゲームのルール

- このゲームは、「超能力者」二人ペアのチーム（二人をアリスとボブとしよう）が、胴元と戦う。
- 二人はペアなのだが、完全に隔離された二つの部屋で、別々にゲームに参加する。
- 二人は、事前に「戦略」を相談でき、それぞれの部屋に、なんでも（スーパーコンピュータでもなんでも）持ち込むことが許されているのだが、ゲーム中に、コミュニケーションすることは、一切禁じられている。（テレパシーも禁止）
- 二つの部屋には、胴元の子分が一人づついて、コインを投げて、その「裏」・「表」を二人に伝える。子分は、コイン投げでは、イカサマはしない。

- 二人は、子分が告げた「裏」・「表」を聞いて、それぞれが「黒」あるいは「白」と叫ぶ。
- 二人の子分が投げた二つのコインの「裏」・「表」と、チームの二人が選んだ「黒」・「白」の組み合わせで、一回のゲームの勝ち負けが決まる。



「超能力者」チームが勝つのは緑の場合
胴元が勝つのは、赤の場合である

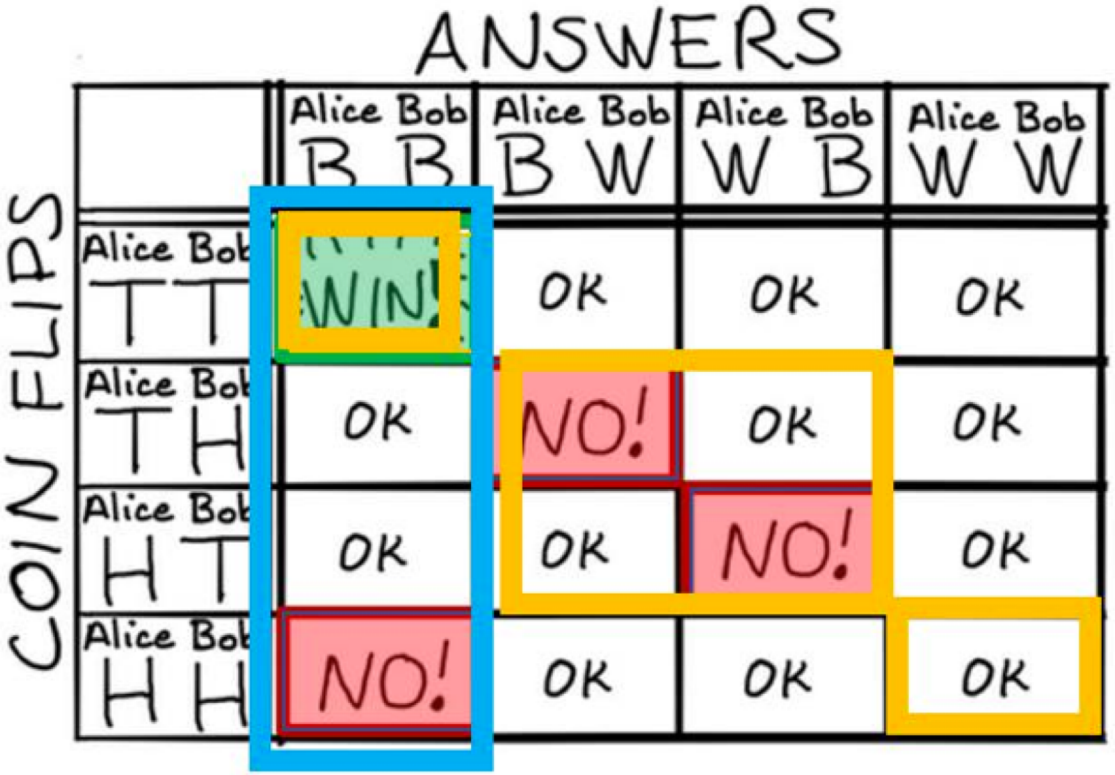


「超能力チーム」は、ゲームに勝てるか？

「超能力者」チームにとって最善の戦略を考える

- チームが勝てるのは、コインが両方とも「裏」で両方とも「黒」と叫んだ時だけだから、「裏」が出たら「黒」と叫ぶのは必須。これが基本戦略。
- それでは、コインが「表」だったら、どうすればいいのか？「白」と叫ぶか「黒」と叫ぶか？
- 「表」が出たらを「白」と叫ぶことにしよう。次の図のオレンジの線で囲まれたところが、可能な組み合わせ。（もちろん、「裏」が出たら無条件で「黒」を選んでいる。）
- この時、6通りの場合があるのだが、その中で、「超能力者」チームが勝つ場合の数は一回で、胴元が勝つ場合の数が二回になります。この戦略では、胴元に敗れる。

「超能力者」チームが勝つのは緑の場合
胴元が勝つのは、赤の場合である



基本戦略

「裏」が出たら
「黒」を選択
これは必須

その上で、次の
二つの選択がある

「表」が出ても
「黒」を選択する

あるいは

「表」が出たら
「白」を選択する

超能力者チームに必勝法はない

- それでは、「裏」が出ても「黒」と叫ぶという戦略はどうだろう？
  要するに、コインの「裏・表」に関係なく、二人とも「黒」と叫び続けるという戦略である。
- 図の青い線で囲まれたところが可能な組み合わせになる。この時、「超能力者」チームが勝つ確率と、胴元が勝つ確率は同じになる。
- 多分、これが最良の戦略。
  逆にいうと、超能力者チームに必勝法はないということになる。

「超能力チーム」がしたこと

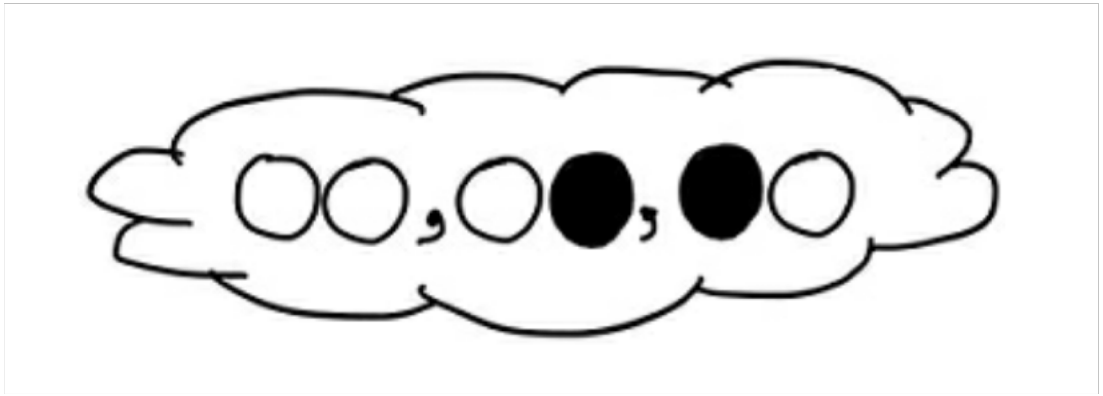
「超能力チーム」がしたこと

- 勝負の当日、「超能力者」チームは、それぞれの部屋に膨大な数の箱（4000個！ これはゲームの予定された回数）とPETEと書かれた機械を持ち込む。
- これ、実は、量子コンピュータ！量子コンピュータを持ち込んじゃいけないというルールはなかったのだから。
- 勝負の結果は、「超能力者」チームの圧勝で、胴元はーゲームも勝つことができなかった。

- このゲーム、量子コンピュータを使うと、「必勝法」があるのだ！

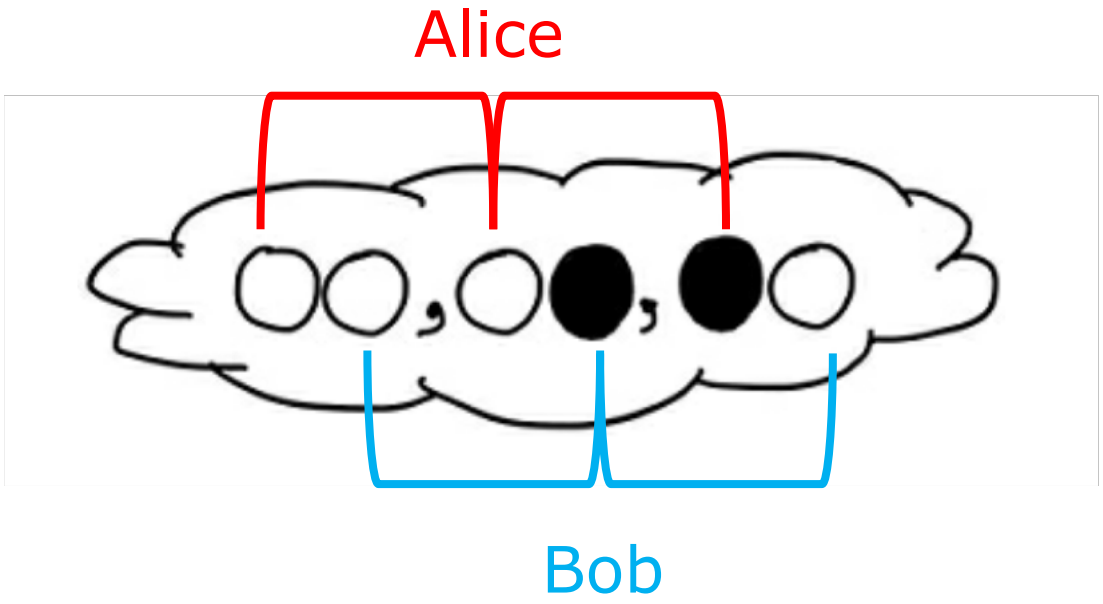
4000個の箱の中身

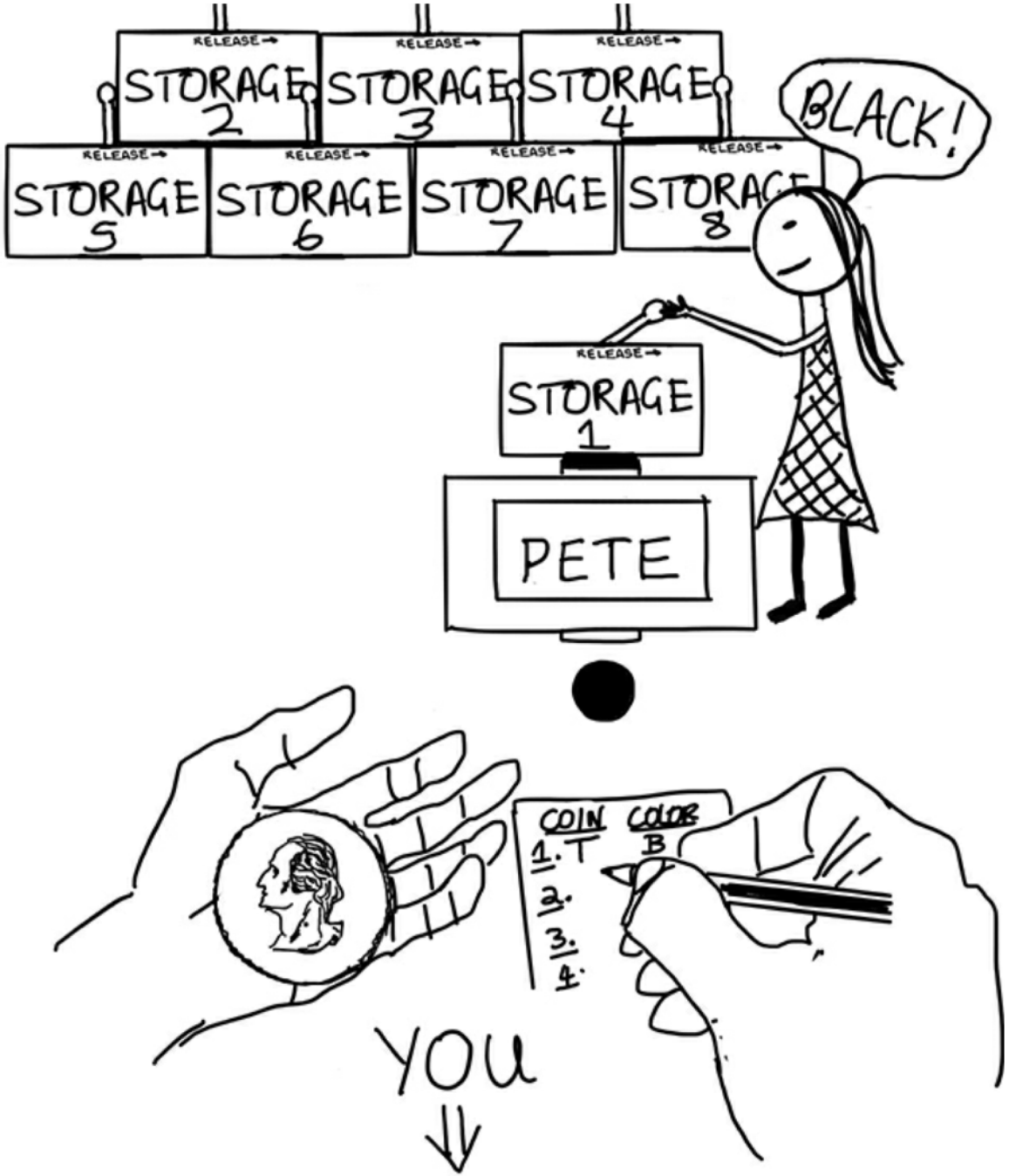
- 超能力チームが持ち込んだ箱の中身は、



4000個の箱の中身

- 超能力チームが持ち込んだ箱の中身は、

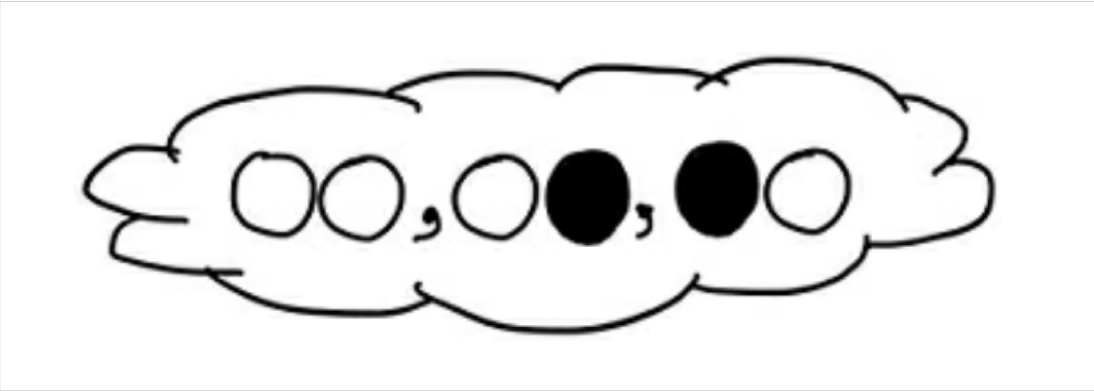



RELEASE
STORAGE 2
STORAGE 3
STORAGE 4
STORAGE 5
STORAGE 6
STORAGE 7
STORAGE 8
BLACK!
STORAGE 1
PETE
COIN
COLOR
1. T
B
2.
3.
4.
YOU

Alice と Bob がすること

Aliceが表で、Bobが表の時

- この時、AliceとBobは、箱からボールを取り出し、それを観測して（雲は消える）、それを答えにする。
  彼らの答えは、WWかWBかBWになる。大事なことはBBという答えにはならないということ（雲の中にBBはない）。



Aliceが裏で、Bobが表の時

- Alice が裏を引いた時、Aliceは、箱をPETEにつなげて、その出力を観察する。

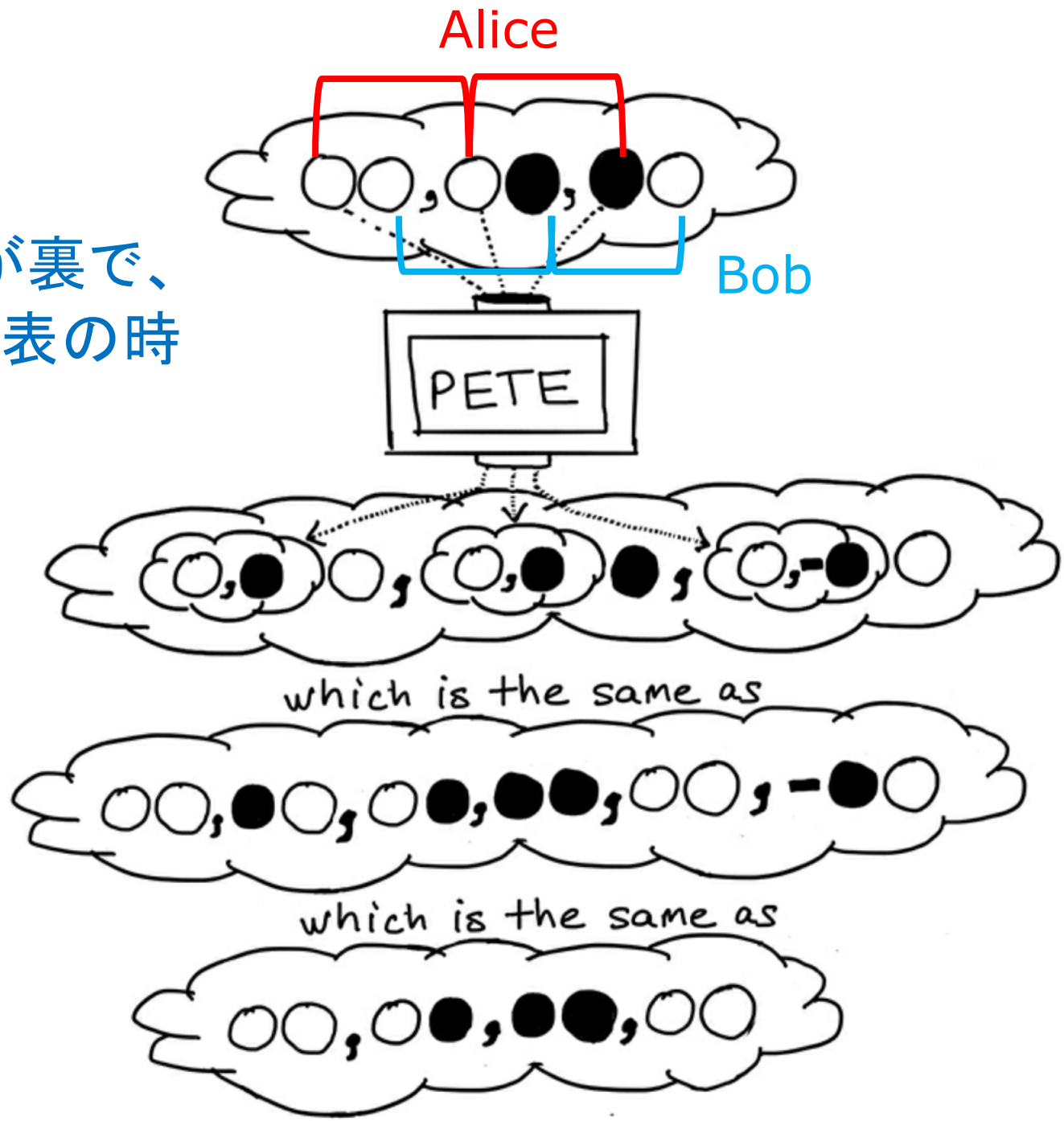
Aliceが表で、Bobが裏の時

- Bob が裏を引いた時、Bobは、箱をPETEにつなげて、その出力を観察する。

Aliceが裏で、Bobが裏の時

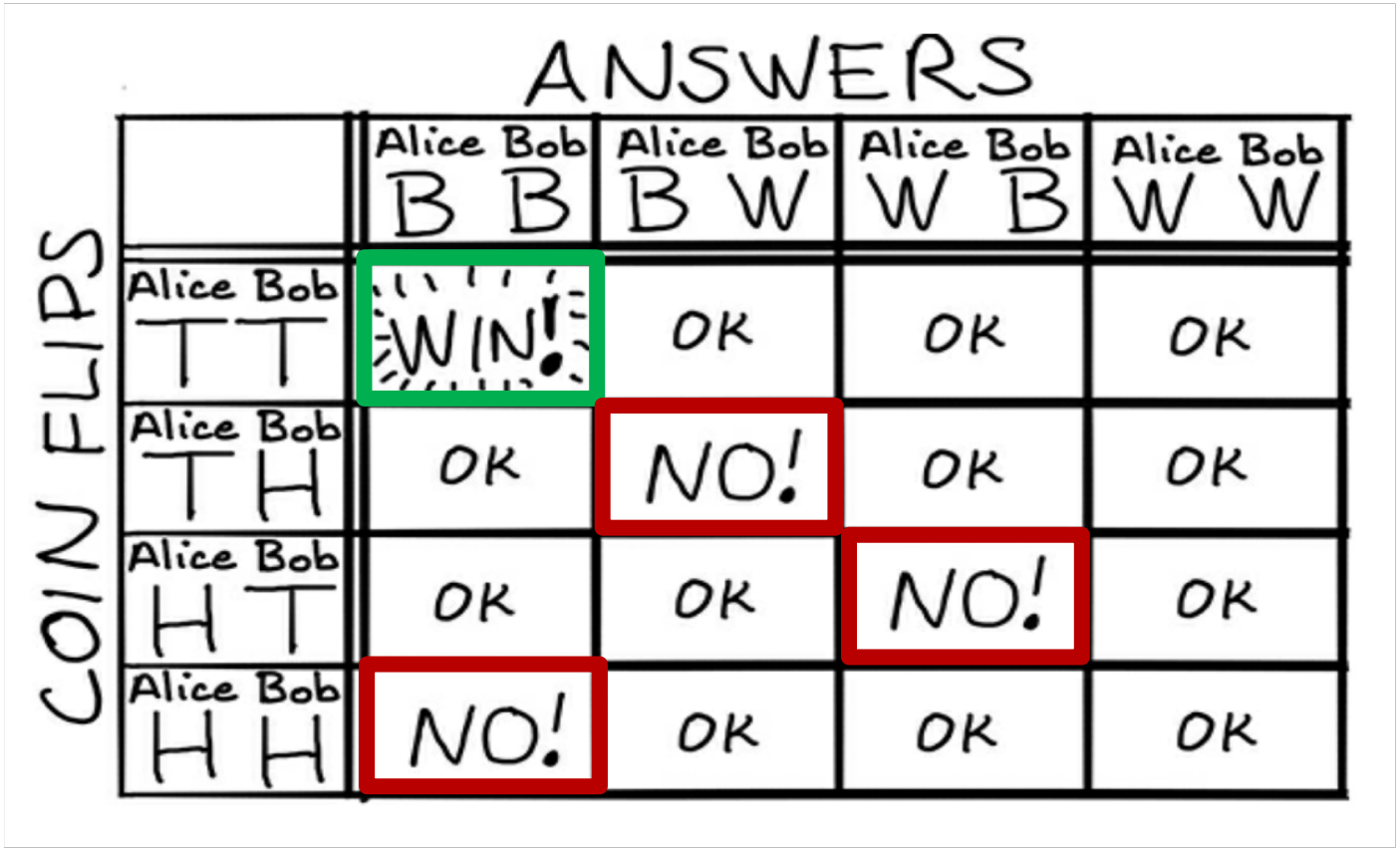
- 二人とも裏を引いた時、二人は、箱をPETEにつなげて、その出力を観察する。

Aliceが裏で、
Bobが表の時



Aliceが裏で、Bobが表の時

- この場合、超能力チームの答えは、WWかWBかBBのいずれかになり、チームが敗れる BWの組み合わせは選ばれることはない。



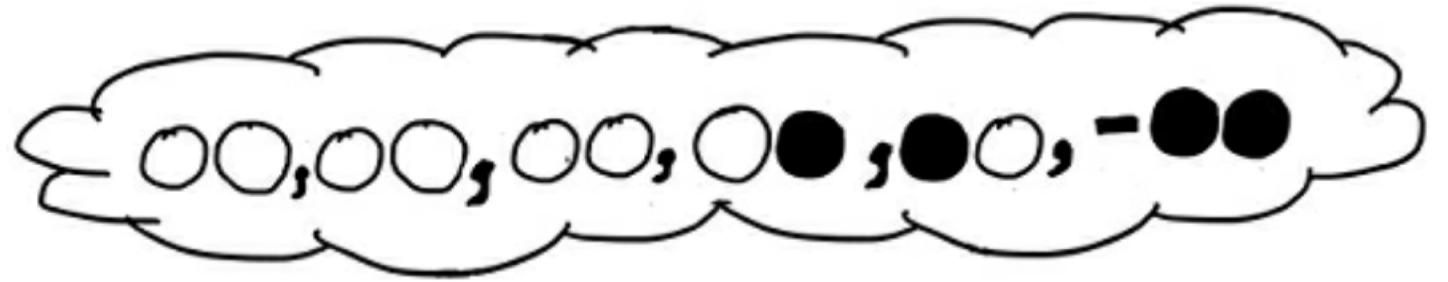
Alice と Bob が裏の場合

[WW,WB,BW]

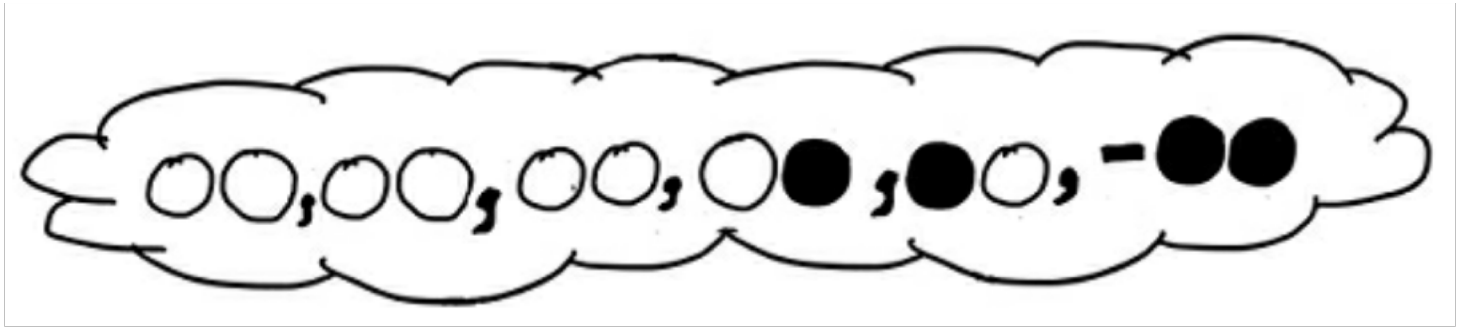
[[W,B][W,B], [W,B][W,−B], [W,−B][W,B]]

[[WW,WB,BW,BB],[WW,−WB,BW,−BB],[WW,WB,−BW,−BB]]

[WW,WW,WW,WB,BW,−BB]



- AliceとBobの双方がボールをPETEを通した時、状態は次のようになる。



- この中には、BBが含まれている。
  このことは、いつか両方のボールが黒だということを見つける可能性があることを示している。



Umesh Vaziraniのアプローチ

“Quantum Mechanics and Quantum Computation”
https://goo.gl/aEGX3Y

Quantum computation is a remarkable subject building on the great computational discovery that computers based on quantum mechanics are exponentially powerful. This course aims to make this cutting-edge material broadly accessible to undergraduate students, including computer science majors who do not have any prior exposure to quantum mechanics. The course starts with a simple introduction to the fundamental principles of quantum mechanics using the concepts of qubits (or quantum bits) and quantum gates.

This treatment emphasizes the paradoxical nature of the subject, including entanglement, non-local correlations, the no-cloning theorem and quantum teleportation. The course covers the fundamentals of quantum algorithms, including the quantum fourier transform, period finding, Shor's quantum algorithm for factoring integers, as well as the prospects for quantum algorithms for NP-complete problems. It also discusses the basic ideas behind the experimental realization of quantum computers, including the prospects for adiabatic quantum optimization and the D-Wave controversy.

Umesh Vaziraniのアプローチ

- Umesh Vaziraniのアプローチの特徴は、量子力学の知識を前提とせず、量子論の基礎と量子情報理論にフォーカスすること。

- 量子力学は、物理学の一分野であり、自然の実在的な物質を対象として、物質の運動法則の解明を目指す。ただ、量子力学では必須の「位置」「運動量」「エネルギー」 … 等のコンセプトは、量子情報理論では必ずしも必須ではない。
- 量子力学と量子情報理論の相対的な分離は、量子情報理論の学習を容易にする。

Umesh Vaziraniのアプローチ

- 彼は量子情報理論の基礎を、次の三つの原理にまとめる。こうした整理は、量子論の見通しをよくする。

  - 重ね合わせの原理
  - 観測の原理
  - ユニタリ発展の原理

Umesh Vaziraniのアプローチ

- その上で、ベクトルと行列の演算で、量子状態の変化を記述する。高校生レベルの線形代数の基本的な知識で、量子論の基本的な部分をカバーすることができる。
  - 列ベクトル – Ket記法
  - 行ベクトルと列ベクトルの内積
  - 行列の積
  - 行列のテンソル積
- 量子過程の二つの配置
  - シリアルな配置 – 行列の積
  - パラレルな配置 – 行列のテンソル積



量子論の三つの原理

1. 重ね合わせの原理
2. 観測の原理
3. ユニタリー発展の原理

重ね合わせの原理

重ね合わせの原理

一般に、量子の状態は、
n次元の複素数ベクトルで表現される

$$\text{量子の状態} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$$

ただし、$c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$は複素数

こうした複素数ベクトル空間をヒルベルト空間という

もっと一般に、量子の状態は、
n個の状態の重ね合わせとして表現される

n次元複素ベクトル空間の基底を $|0\rangle,|1\rangle,|2\rangle,\ldots,|n-1\rangle$ とすると、

$$\text{量子の状態} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} \text{ は、}$$

$$\mathbf{c_0|0\rangle + c_1|1\rangle + \ldots + c_{n-1}|n-1\rangle}$$

と表現される。ただし、$|c_0|^2+|c_1|^2+\ldots+|c_{n-1}|^2=1$

qubitの場合

qubitの状態は、二つのベクトルの和として表される

$$\text{qubitの状態} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = c_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ベクトル空間の「基底」

ここで、$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を |0>, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を |1> で表すと

$$\text{qubitの状態} = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$$

ただし、 $|c_0|^2+|c_1|^2=1$

と表現できる。

古典bitの状態は、0か1で表される
qubitの状態は、2次元の複素数ベクトルで表現される

bitの状態 ＝ 0か1



qubitの状態 ＝ $\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}$

ただし、c_0, c_1は複素数で、$|c_0|^2+|c_1|^2=1$

一つのbitは、0か1の二つの状態しかとらないが、
一つのqubitは、無限に多くの状態を取りうる

古典Bit
0か1

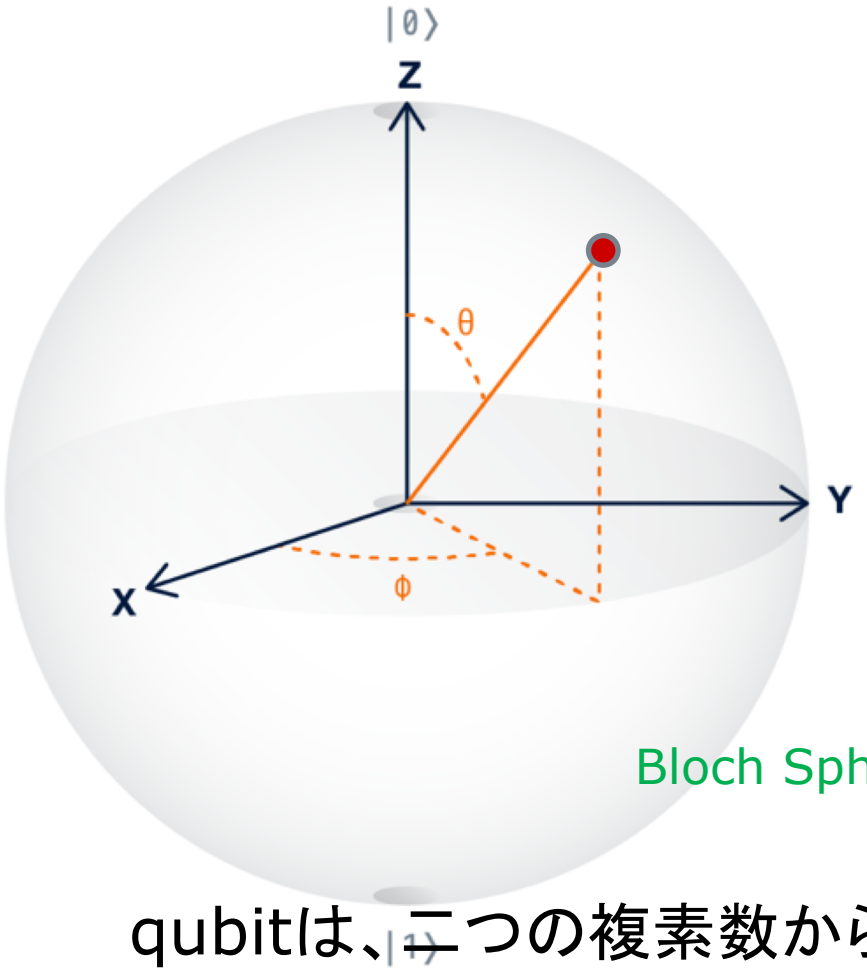
0

1

Bitは、0または1
どちらかの状態を取る

bitは、整数値を取り、離散的

量子Qubit



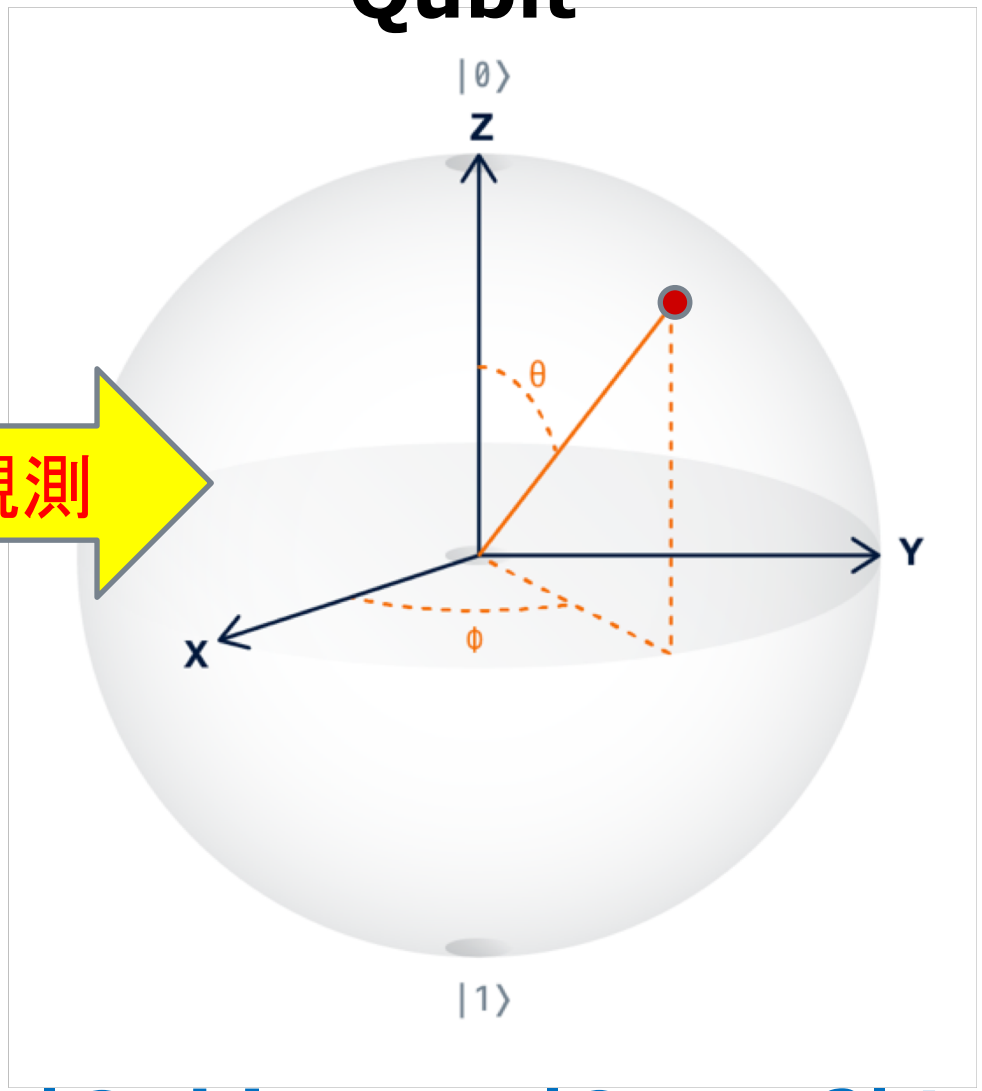
Bloch Sphere

qubitは、二つの複素数からなり、連続的

qubitを決める複素数c_0,c_1は、それぞれ2つの実数からなるが、$|c_0|^2+|c_1|^2=1$という条件があるので、自由度は一つ減って、qubitを決めるのは、3つの実数である。

観測の原理

Qubit

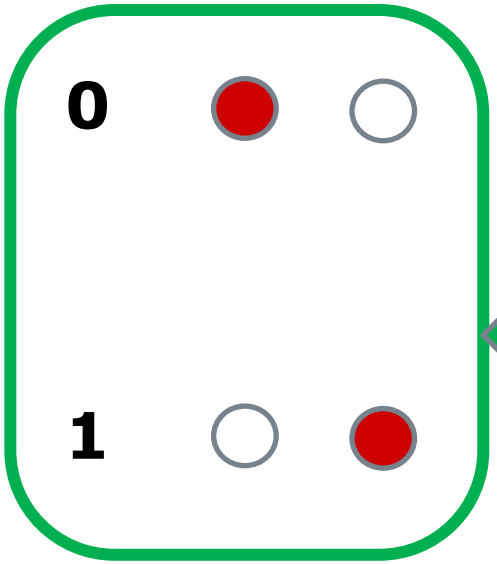


Qubitは、状態 |0>と状態 |1>の重ね合わせの状態を取る

|Qubit> = *α*|0> + *β*|1>

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \; ; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

観測を行うと、Qubitの
重ね合わせの状態は
失われ、0か1かの情報
が返る。



観測

観測値

Qubit

$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$
の重ね合わせの
状態は、失われる

この時
0を得る確率は、$|\alpha|^2$で、
1を得る確率は、$|\beta|^2$で、
与えられる。

$\alpha^*\alpha + \beta^*\beta = 1 \; ; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

qubitの観測

qubitの状態 $c_0|0> + c_1|1>$ を観測したとする。この時、

状態 $|0>$ が観測される確率は、$|c_0|^2$ で与えられる。
観測前の状態$c_0|0> + c_1|1>$は、新しい状態 $|0>$に変わる。

状態 $|1>$ が観測される確率は、$|c_1|^2$ で与えられる。
観測前の状態$c_0|0> + c_1|1>$は、新しい状態 $|1>$に変わる。

これをBornのルールと呼ぶ、

観測によって、重ね合わせの状態は破られる。

一般の量子状態の観測

一般の量子状態 $|\psi\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} c_k|k\rangle$ が与えられた時、

状態 $|0\rangle$ が観測される確率は、$|c_0|^2$ で与えられる。
観測前の状態 $|\psi\rangle$は、新しい状態 $|0\rangle$に変わる。

状態 $|1\rangle$ が観測される確率は、$|c_1|^2$ で与えられる。
観測前の状態$|\psi\rangle$は、新しい状態 $|1\rangle$に変わる。

・・・

状態 $|k\rangle$ が観測される確率は、$|c_k|^2$ で与えられる。
観測前の状態$|\psi\rangle$は、新しい状態 $|k\rangle$に変わる。

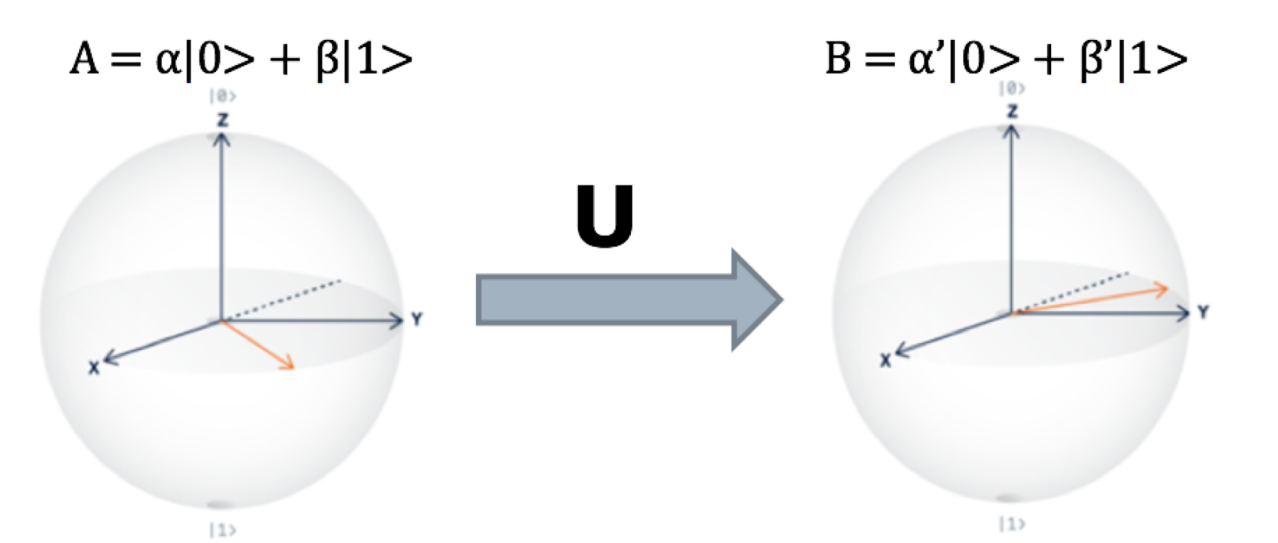
ユニタリ発展の原理

ユニタリ変換の原理

ある量子の状態は、他の状態に変化することができる。
その変化は、「ユニタリ変換」という、ルールに従う。

量子の状態ベクトル |A⟩は、このユニタリ変換Uによって、他の状態 |B⟩ に変換される。

$$U\ |A\rangle = |B\rangle$$

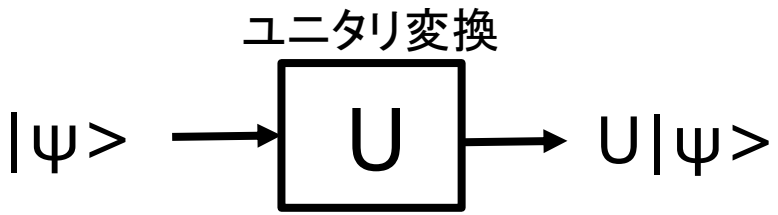


ユニタリ演算子　Unitary Operator

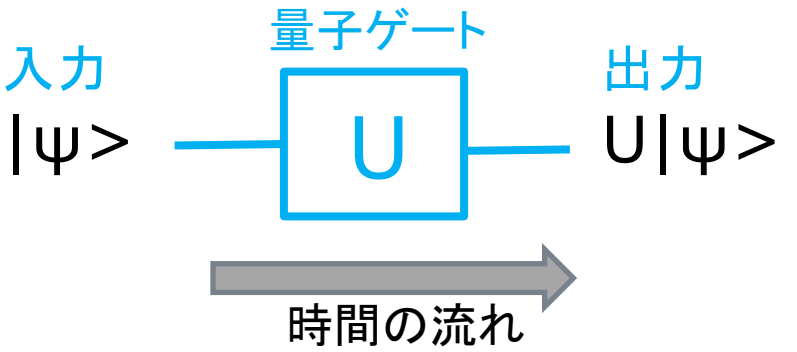
- $UU^{\dagger} = U^{\dagger}U = I$ (単位行列)を満たす行列を、ユニタリ行列と呼ぶ。
- ユニタリ変換Uは、幾何的には、ベクトルの長さを変えないベクトルの回転である。
- ユニタリ演算子を適用しても、二つのベクトルの内積は変化しない。ユニタリ演算子は、内積を保存する。

量子ゲート

- 量子の状態 |ψ>は、ユニタリ変換Uの作用を受けて、状態 U|ψ> に変化する。
- この変化 |ψ> → U|ψ>を、次のように表そう。



- この時、Uを、|ψ> を入力、U|ψ> を出力とする回路と考えることができる。これを、「量子ゲート」と呼ぶ。



代表的な1-qubitのゲート



Bit Flipper

$a|0\rangle+b|1\rangle \rightarrow b|0\rangle+a|1\rangle$



Phase Flipper

$a|0\rangle+b|1\rangle \rightarrow a|0\rangle-b|1\rangle$



Hadamard

$a|0\rangle+b|1\rangle \rightarrow$

$\frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)|0\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}(a-b)|1\rangle$

演習課題 2-3

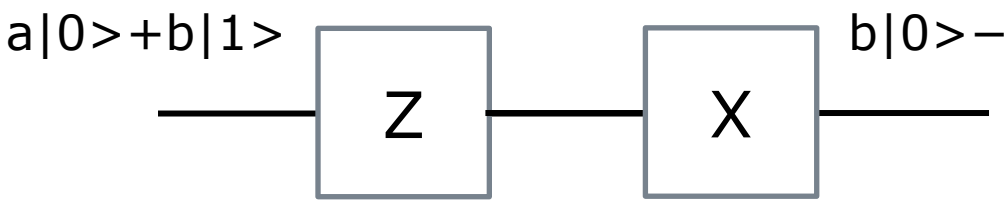
|0>,|1>基底から
|+>,|->基底への変換


量子過程の二つの配置

シリアルな配置
行列の積

シリアルに接続された量子過程の作用は、
行列の積で計算できる

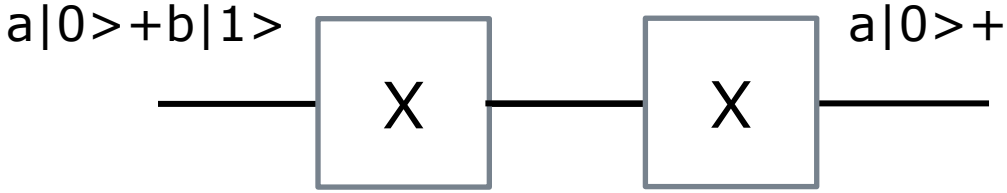
1-qubitのゲートを、直列に組み合わせる (1)



$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

X Z

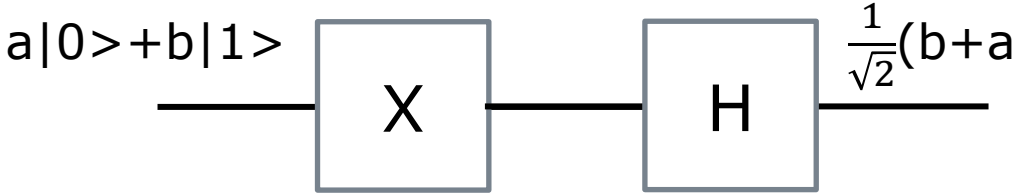
a|0>−b|1>



$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

X X

b|0>+a|1>



$\frac{1}{\sqrt{2}}$(b+a)|0>+ $\frac{1}{\sqrt{2}}$(b−a)|1>

b|0>+a|1>

1-qubitのゲートを、直列に組み合わせる (2)

$R_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/2^k} \end{pmatrix}$ とする。

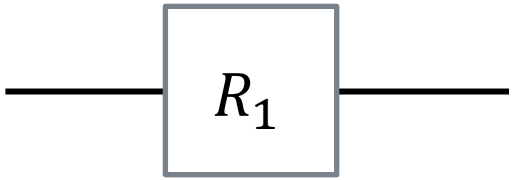
$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/2^1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/2^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \end{pmatrix}$$

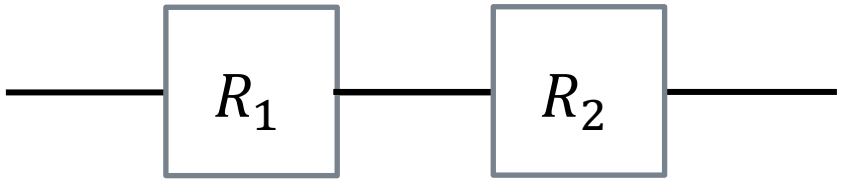
$$R_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/2^4} \end{pmatrix} = \cdots$$

1-qubitのゲートを、直列に組み合わせる (2)



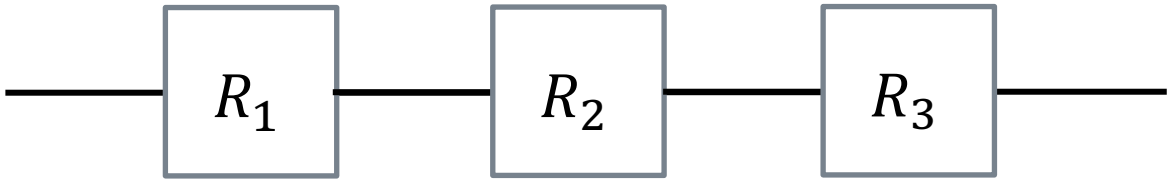
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/2^1} \end{pmatrix} |\psi>$$

R_1



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/2^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/2^1} \end{pmatrix} |\psi>$$

R_2 R_1



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/2^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/2^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/2^1} \end{pmatrix} |\psi>$$

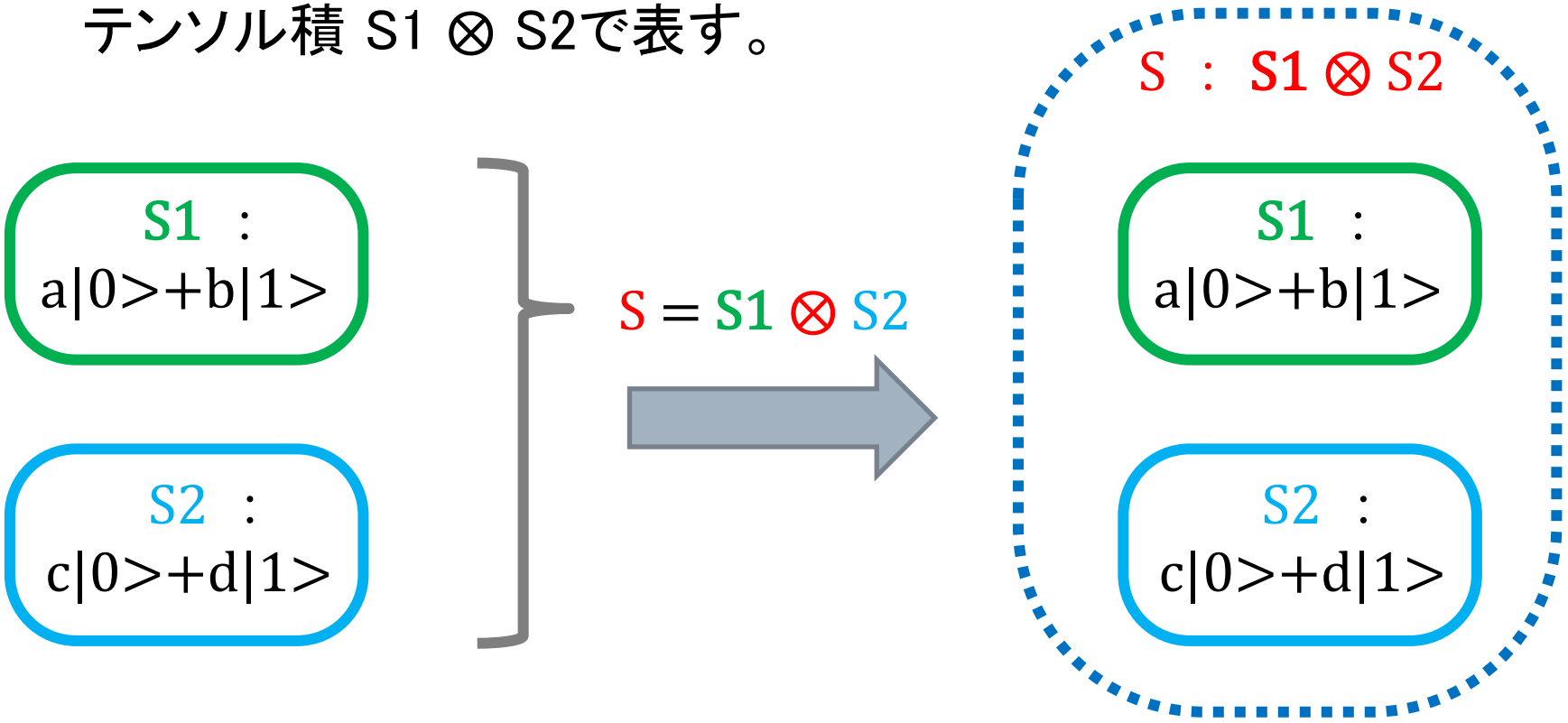
R_3 R_2 R_1

パラレルな配置
行列のテンソル積

パラレルに配置された量子過程の作用は、
行列のテンソル積で計算できる

テンソル積

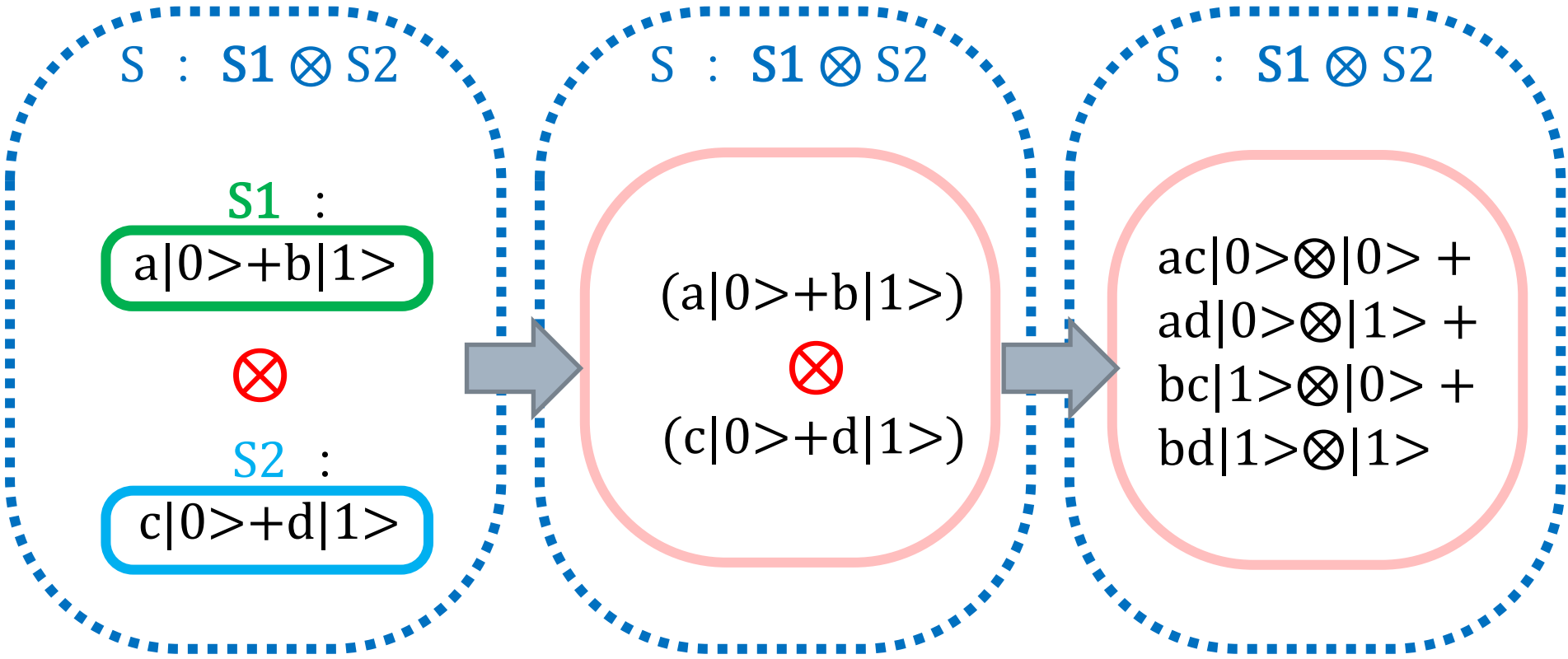
- qubit a|0>+b|1> のみを含むシステムS1、
  qubit c|0>+d|1> のみを含むシステムS2
  があるとしよう。
  この二つを一緒にしたシステムSを
  テンソル積 S1 ⊗ S2で表す。



テンソル積

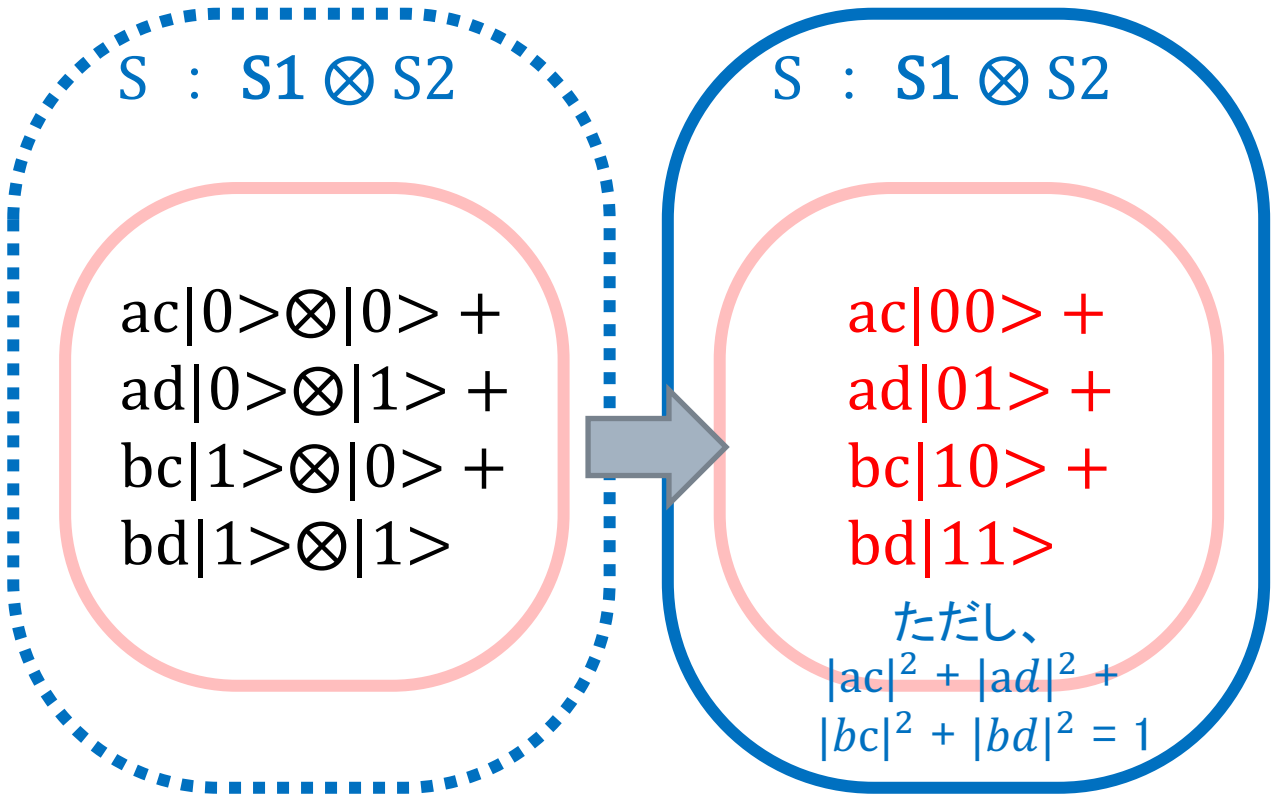
- この時、次のような計算で、Sの状態を計算する。

$$S = S1 \otimes S2 = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle)$$
$$= ac|0\rangle\otimes|0\rangle + ad|0\rangle\otimes|1\rangle + bc|1\rangle\otimes|0\rangle + bd|1\rangle\otimes|1\rangle$$



テンソル積

- |a>⊗|b>を |ab>と表すことにする。
  |0>⊗|0> –> |00>, |0>⊗|1> –> |01>,
  |1>⊗|0> –> |10>, |1>⊗|1> –> |11>



行列のテンソル積

行列のテンソル積

行列のテンソル積を次のように定義する。（2x2行列で例示）

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B \\ A_{21}B & A_{22}B \end{pmatrix}$$

Bの成分も書くと、

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} & A_{12}B_{11} & A_{12}B_{12} \\ A_{11}B_{21} & A_{11}B_{22} & A_{12}B_{21} & A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} & A_{21}B_{12} & A_{22}B_{11} & A_{22}B_{12} \\ A_{21}B_{21} & A_{21}B_{22} & A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

行列のテンソル積の例（1）

$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ としよう。

$$A\otimes B=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{2}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} & \mathbf{-1}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\\ \mathbf{0}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} & \mathbf{2}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & -2\\ 3 & 4 & -3 & -4\\ 0 & 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 6 & 8\end{pmatrix}$$

行列のテンソル積の例 (2)

$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ としよう。

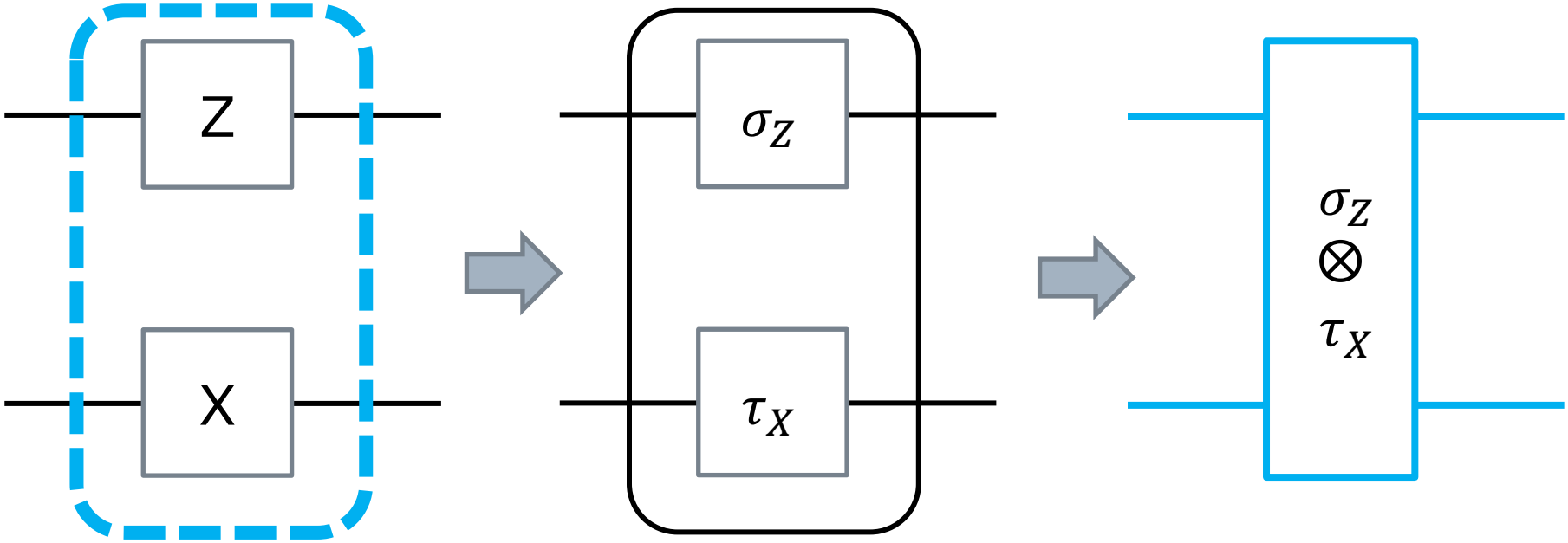
$$B\otimes A=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{3} & \mathbf{4}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix} & \mathbf{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\\ \mathbf{3}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix} & \mathbf{4}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -2\\ 0 & 2 & 0 & 4\\ 3 & -3 & 4 & -4\\ 0 & 6 & 0 & 8\end{pmatrix}$$

ゲートを並列に組み合わせる

1-qubitのゲートを、並列に組み合わせる

二つの 1-qubit ゲートがある時、それらを並列に組み合わせて、2-qubitの量子ゲートを構成することができる。この量子ゲートは、それぞれの量子ゲートのユニタリ行列のテンソル積として作用する。



1-qubitのゲートを、並列に組み合わせる

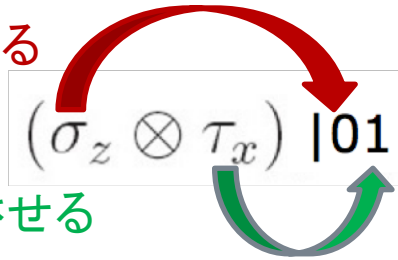
2-qubitのシステムで、最初のqubitに、演算子 X, Y, Zを適用する演算子を、σ_x , σ_y , σ_z とし、二つ目のqubitに、演算子 X, Y, Zを適用する演算子を、τ_x , τ_y , τ_z とする。

$$\sigma_z \otimes \tau_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_x \otimes \tau_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1-qubitのゲートを、並列に組み合わせる

最初のqubitにZを作用させる



$(\sigma_z \otimes \tau_x)$ |01> = |00>

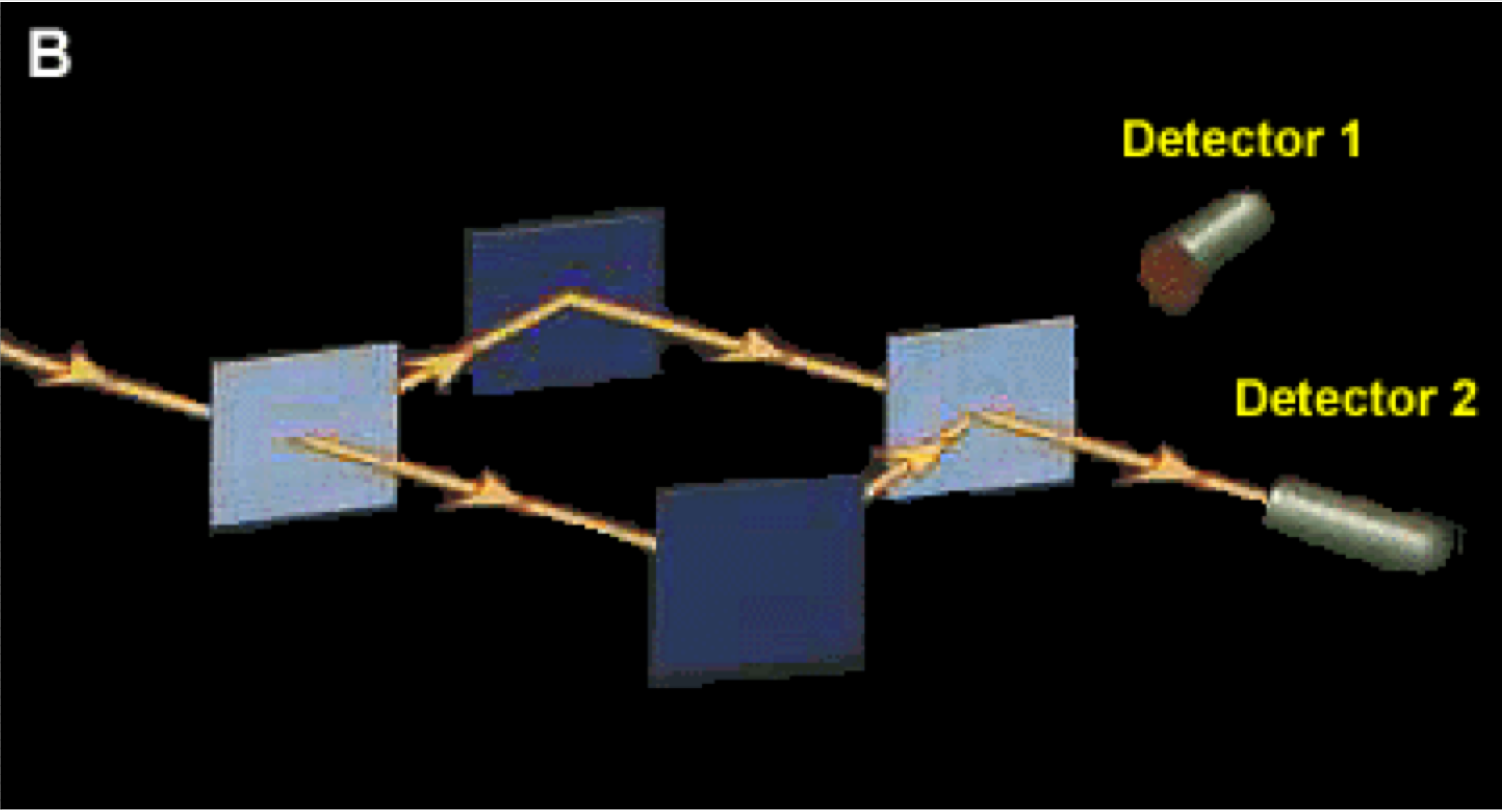
二つ目のqubitにZを作用させる

Z|0>=|0>, X|1>=|0>　　結果は|0>⊗|0>=|00>

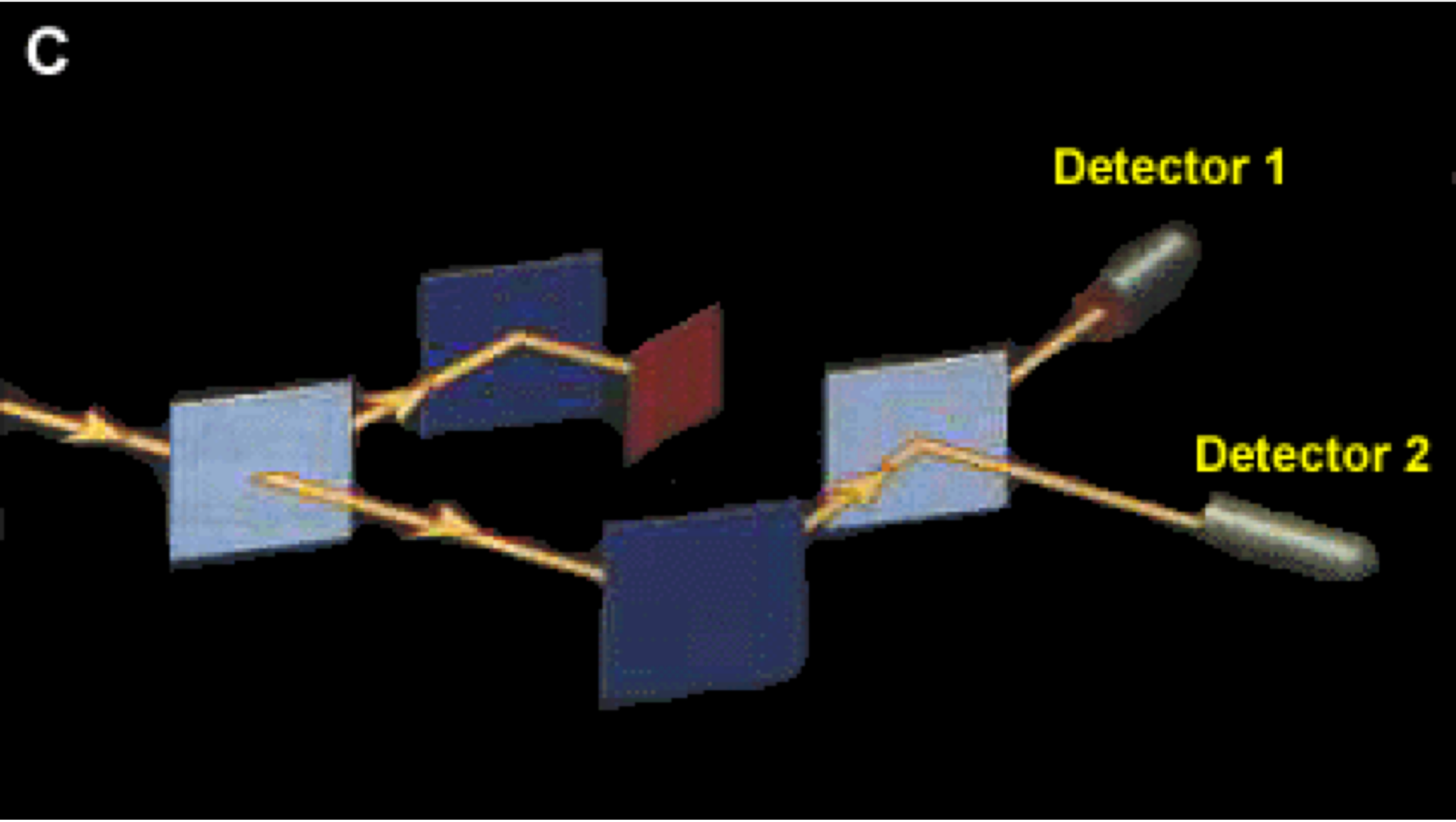
$\sigma_Z \otimes \tau_X$　　|01>　　|00>

$$(\sigma_z \otimes \tau_x)\,|01> = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

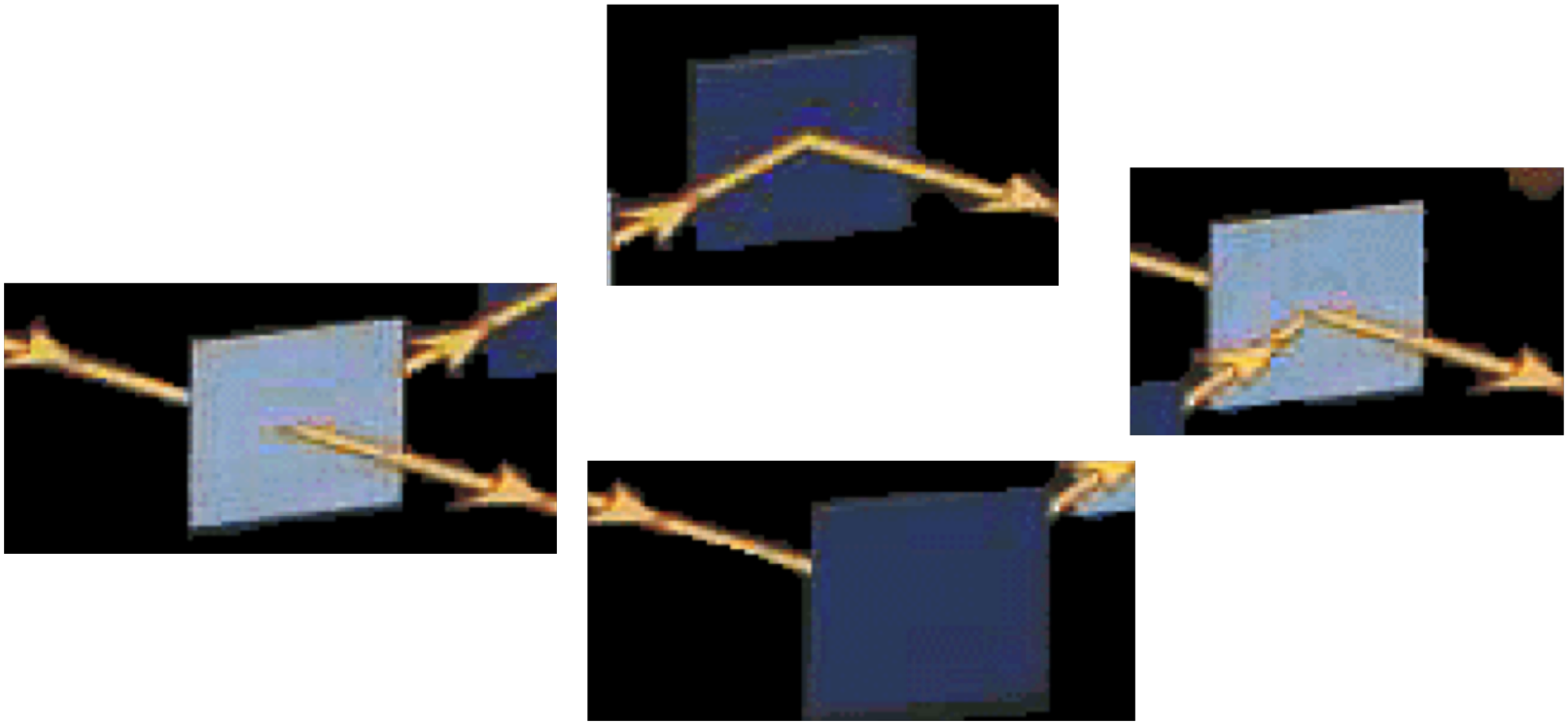

Mach Zehnder 干渉計の実験



ハーフミラー二つと鏡二つを組み合わせて、上のような装置を作る。光は干渉をおこして、検出器の一方にしか届かなくなる。
奇妙なことは、光子一個で実験しても、このことは変わらない。
一個の光子は、二つの道を「同時」に通っている。

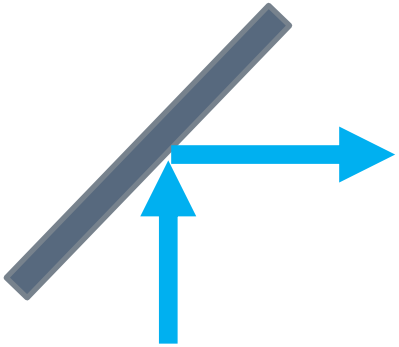


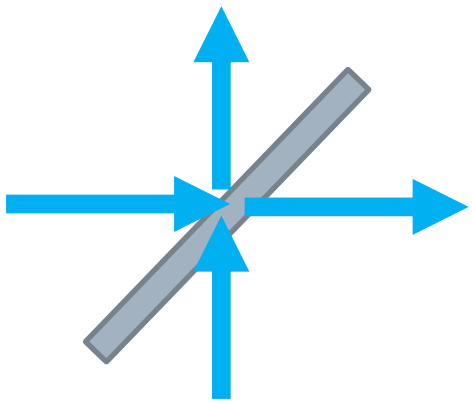
もっと奇妙なことは、光路の一方を塞ぐと、光は両方の検出器に届くようになる。光子一個で考えると、行く手を阻まれた光子は、そのことを、他方の光子に伝えて（どっちも自分自身なのだが）、その性質を変えているように見える。



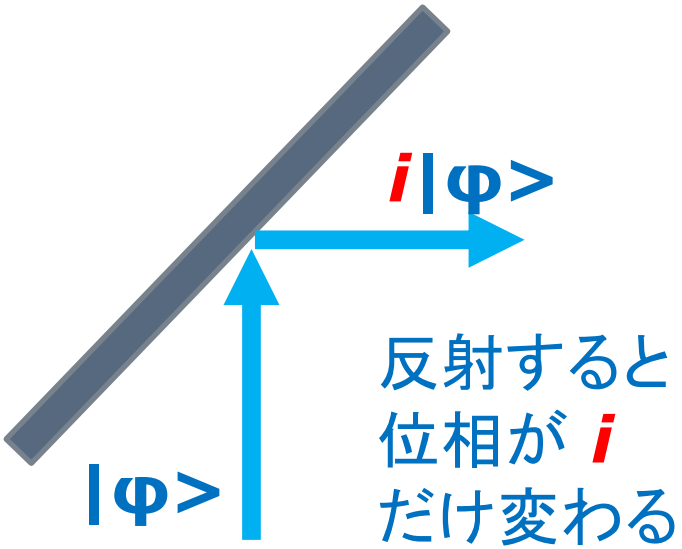
ビームスプリッター

鏡

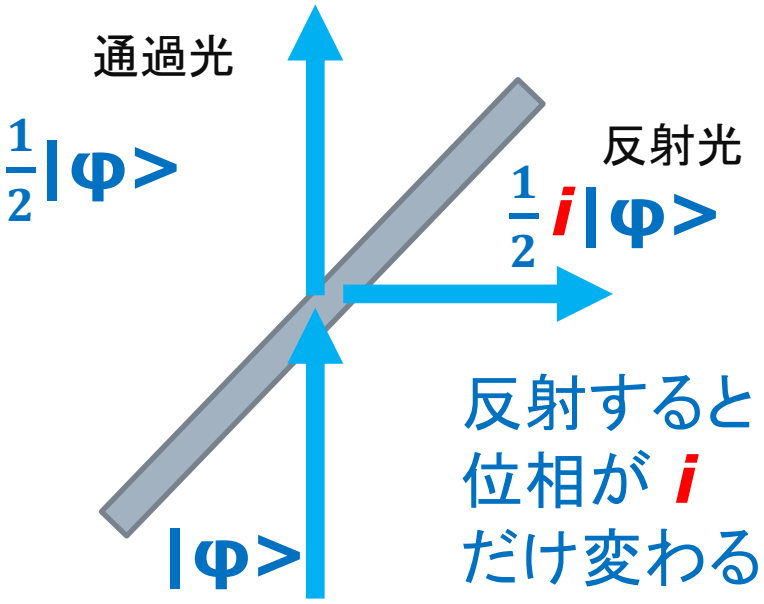


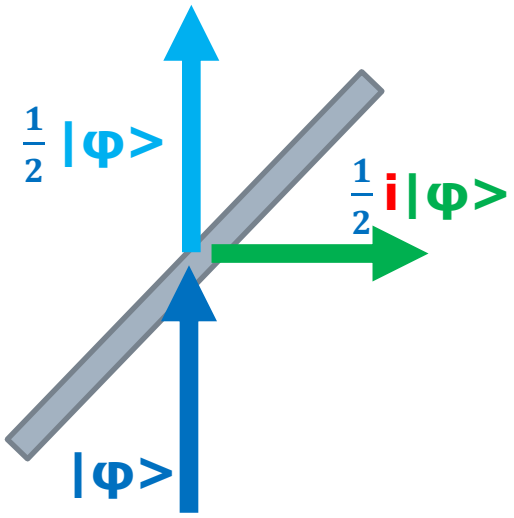


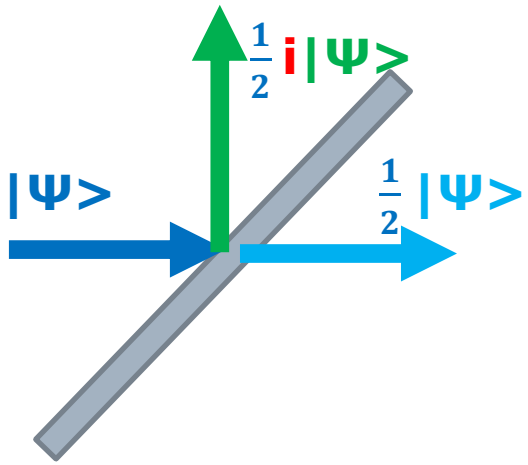
鏡

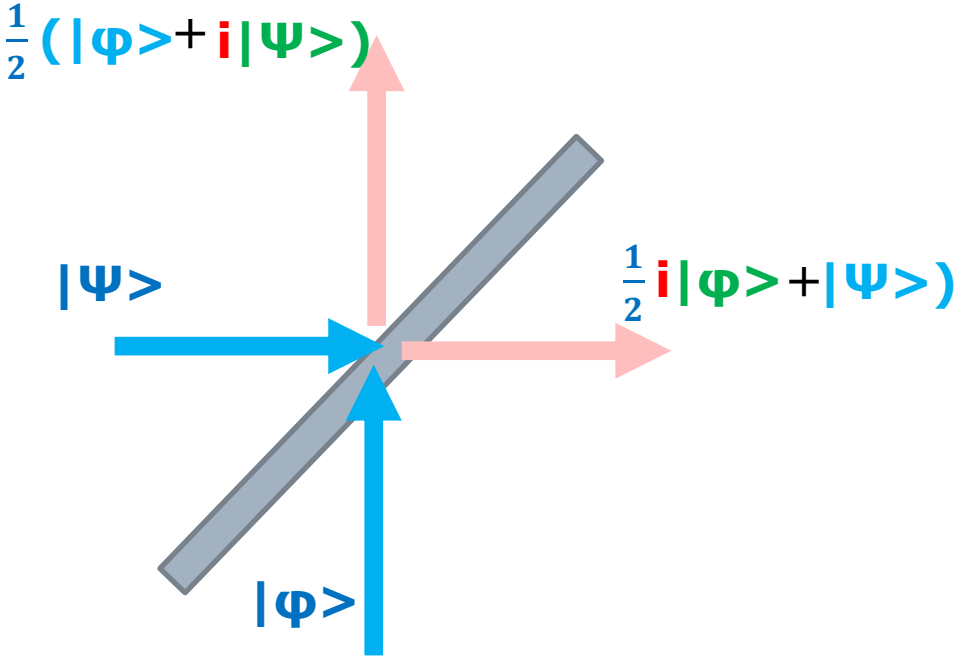

$i|\varphi\rangle$
$|\varphi\rangle$
反射すると
位相が i
だけ変わる

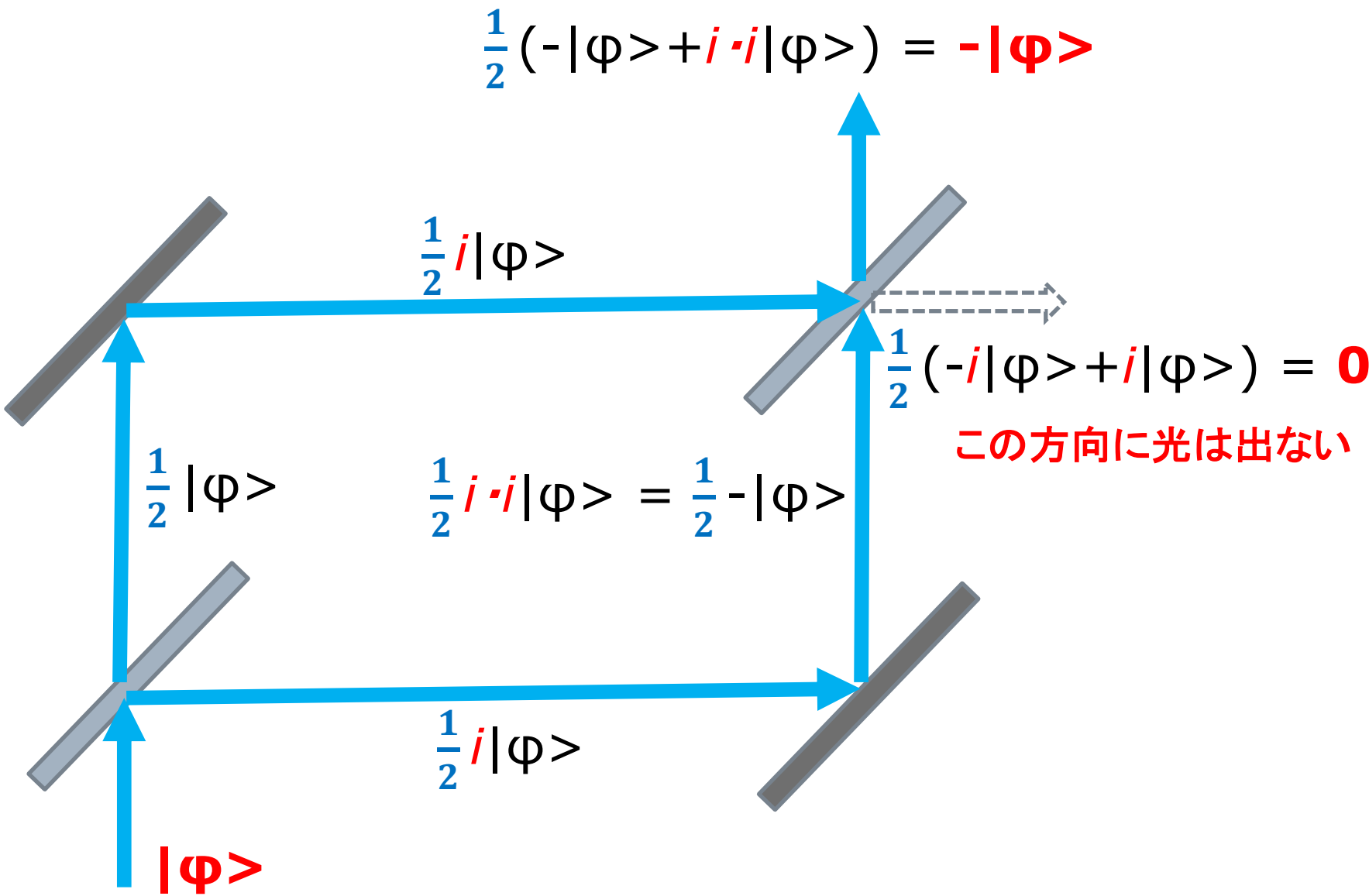
ビーム・スプリッター

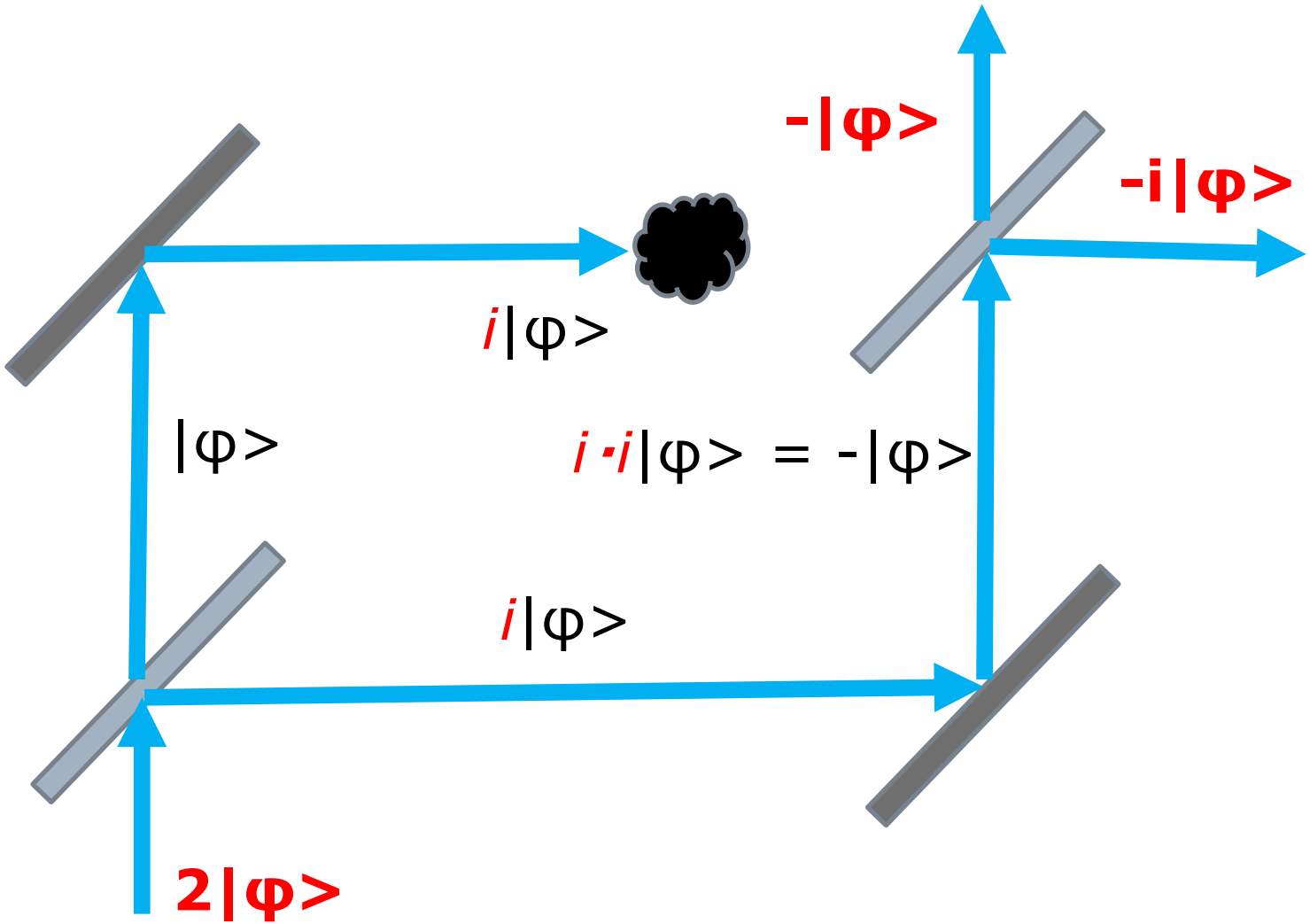

通過光
$\frac{1}{2}|\varphi\rangle$
反射光
$\frac{1}{2}i|\varphi\rangle$
$|\varphi\rangle$
反射すると
位相が i
だけ変わる


$\frac{1}{2}|\varphi\rangle$
$\frac{1}{2}i|\varphi\rangle$
$|\varphi\rangle$


$\frac{1}{2}i|\Psi\rangle$
$|\Psi\rangle$
$\frac{1}{2}|\Psi\rangle$

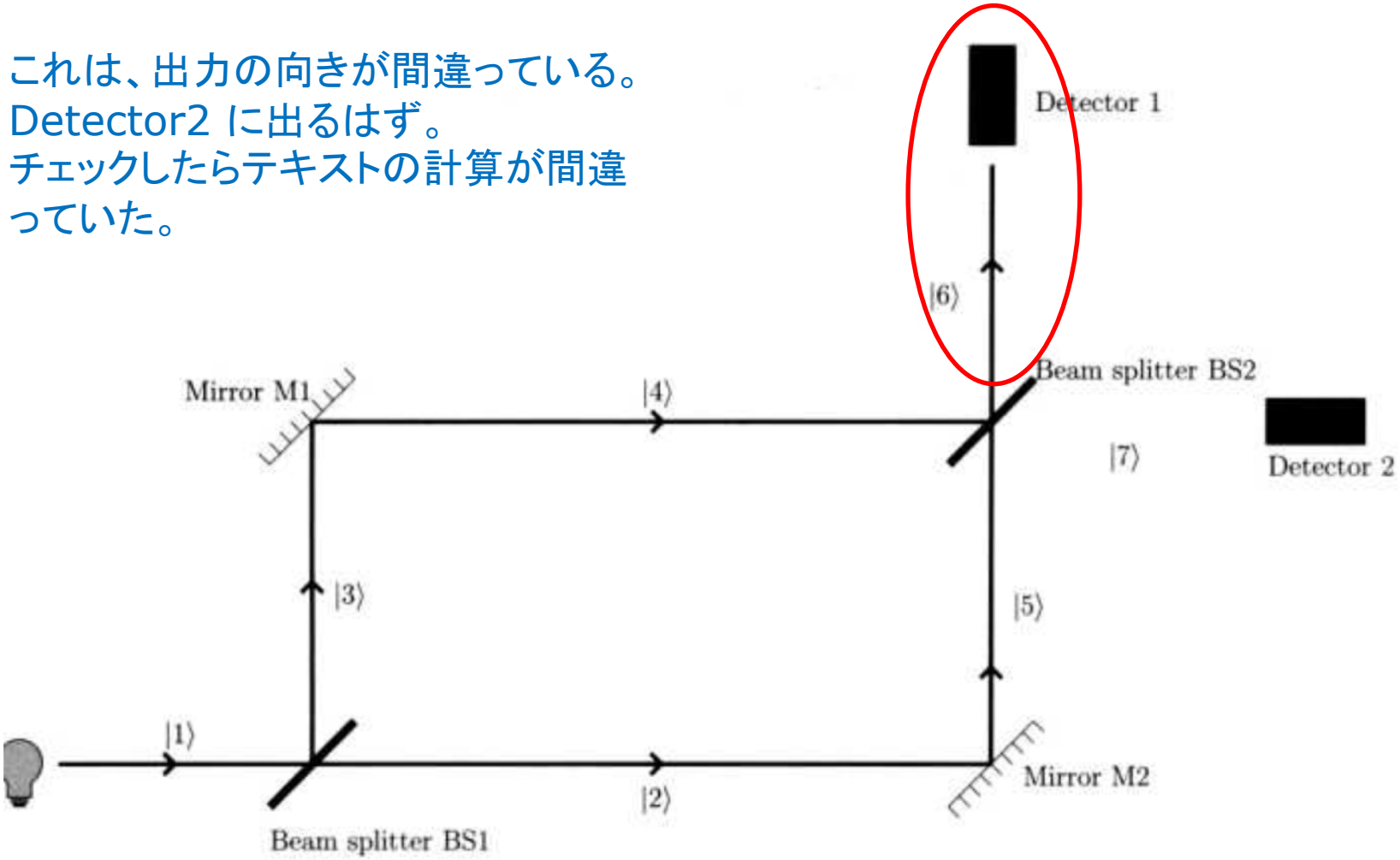

$\frac{1}{2}(|\varphi\rangle+i|\Psi\rangle)$
$|\Psi\rangle$
$\frac{1}{2}i|\varphi\rangle+|\Psi\rangle)$
$|\varphi\rangle$


$\frac{1}{2}(-|\varphi\rangle+i\cdot i|\varphi\rangle) = -|\varphi\rangle$
$\frac{1}{2}i|\varphi\rangle$
$\frac{1}{2}(-i|\varphi\rangle+i|\varphi\rangle) = 0$
この方向に光は出ない
$\frac{1}{2}|\varphi\rangle$
$\frac{1}{2}i\cdot i|\varphi\rangle = \frac{1}{2}-|\varphi\rangle$
$\frac{1}{2}i|\varphi\rangle$
$|\varphi\rangle$

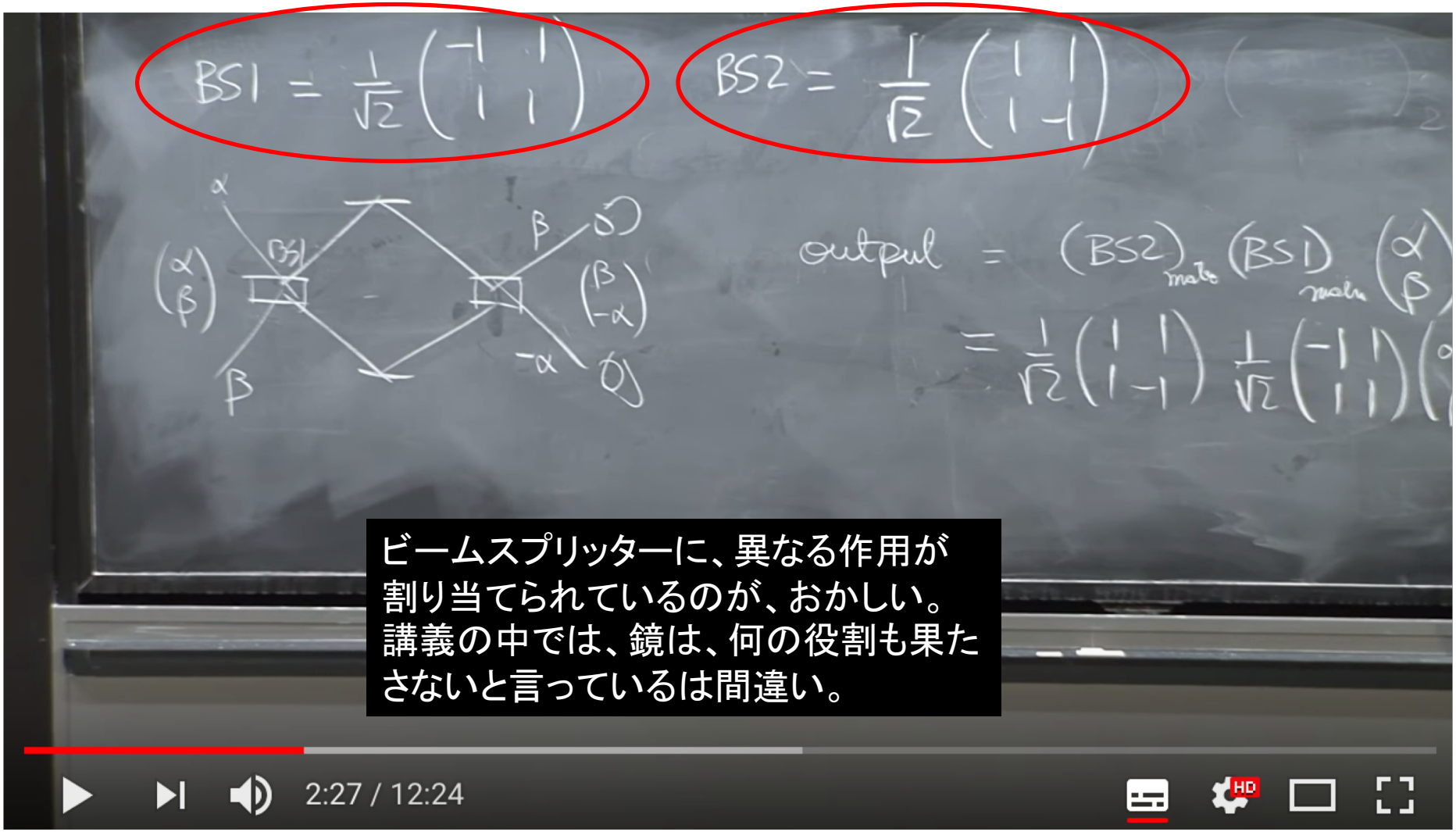


先の図で、$\frac{1}{2}$がうるさいので、入力を二倍にした

これは、出力の向きが間違っている。
Detector2 に出るはず。
チェックしたらテキストの計算が間違っていた。



Vlatko Vedral.
“Introduction to Quantum Information Science”
Oxford Graduate Text
https://goo.gl/aPaF8L

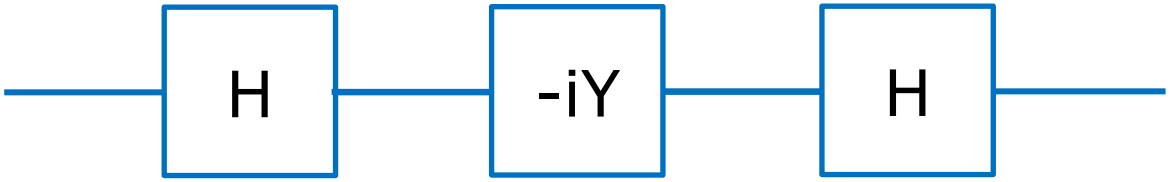


Barton Zwiebach
"L2.4 Interferometer and interference."
MIT 8.04 Quantum Physics I, Spring 2016
https://goo.gl/nN4NLw

先の図の BS1=$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$は、

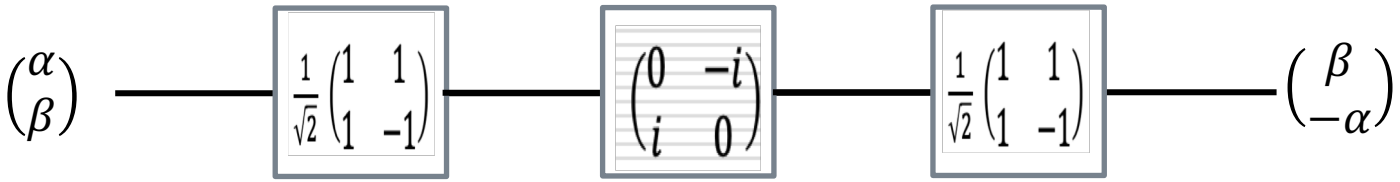
-iYH= -i $\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\frac{-i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-i & i\\ i & i\end{pmatrix}$=BS1である。

ビームスプリッター　二つの鏡　ビームスプリッター

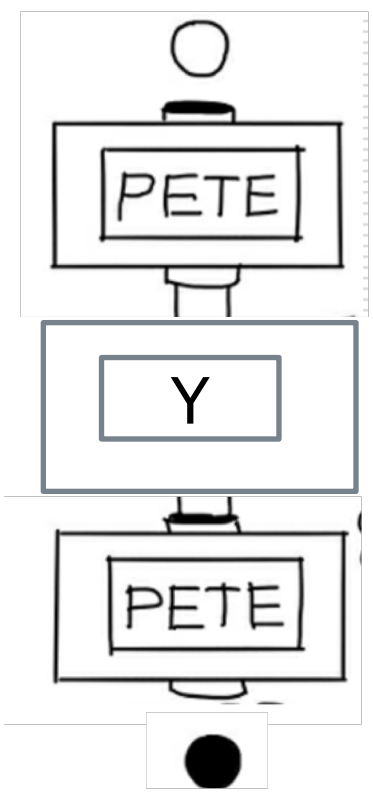


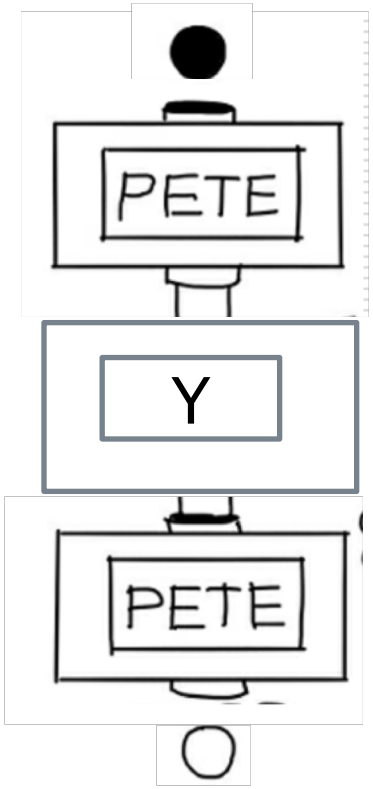
正規化因子を省略している

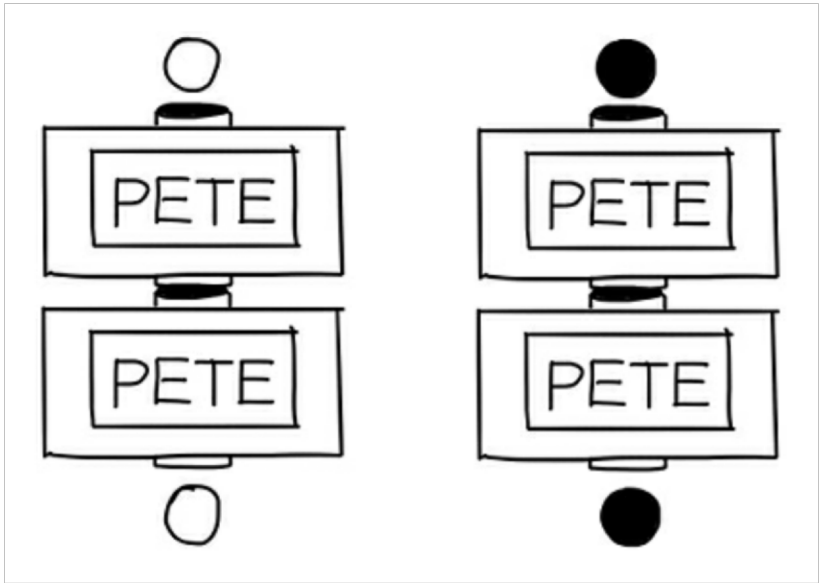
$$\begin{pmatrix}\alpha+\beta\\ \alpha-\beta\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}-i(\alpha-\beta)\\ i(\alpha+\beta)\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}-i(\alpha-\beta)+i(\alpha+\beta)\\ -i(\alpha-\beta)-i(\alpha+\beta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta\\ -\alpha\end{pmatrix}$$

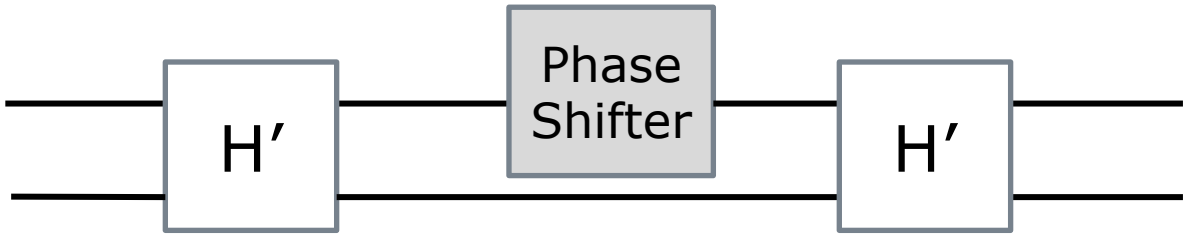


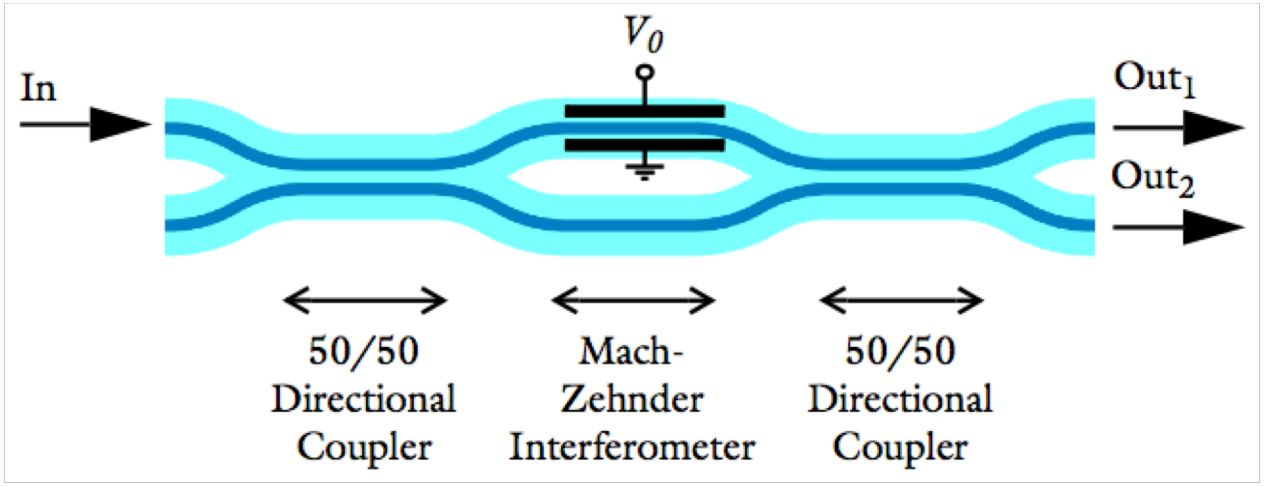
$$\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha+\beta\\ \alpha-\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-i(\alpha-\beta)\\ i(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$$


PETE
Y
PETE

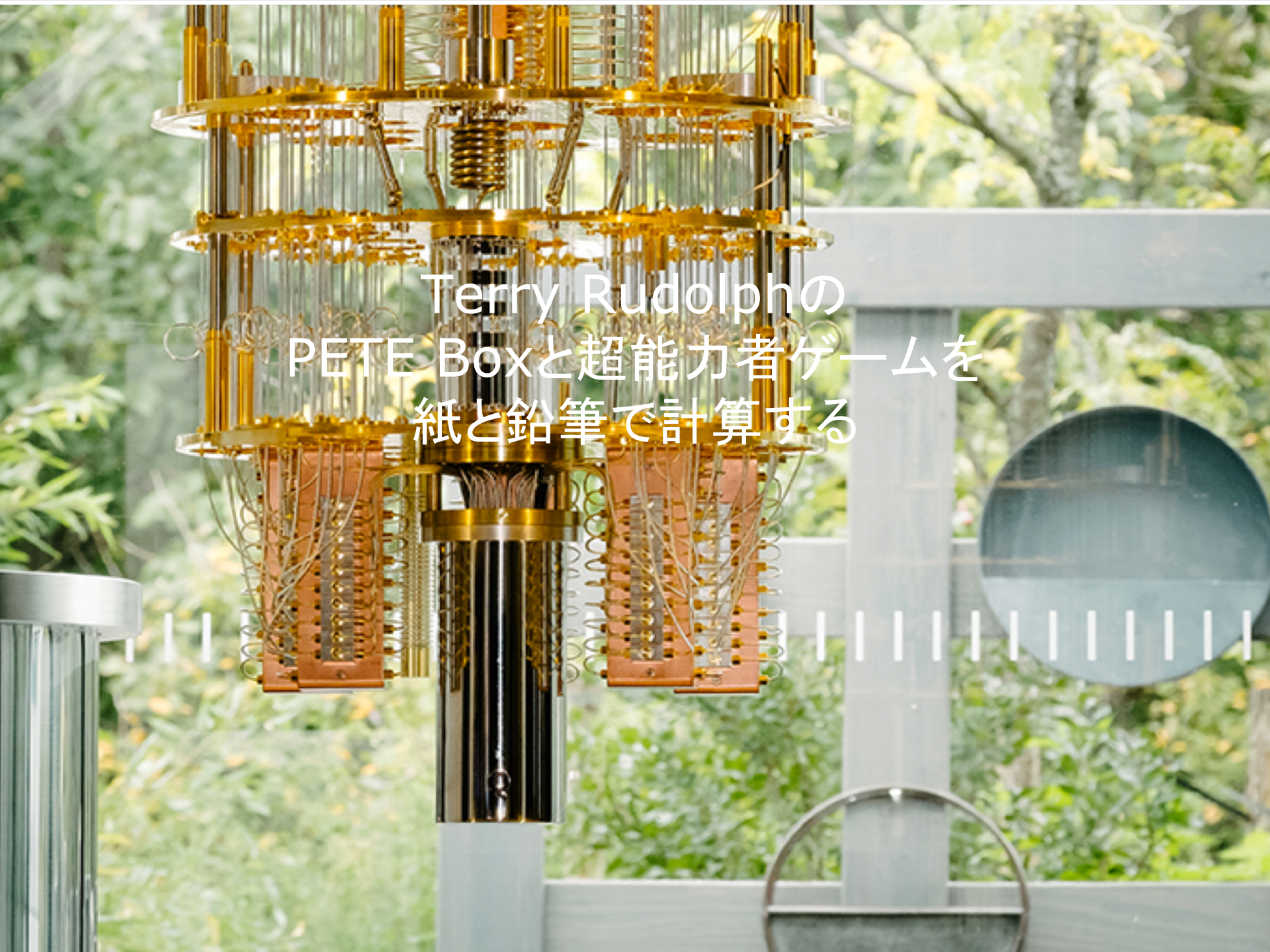

PETE
Y
PETE


PETE
PETE
PETE
PETE



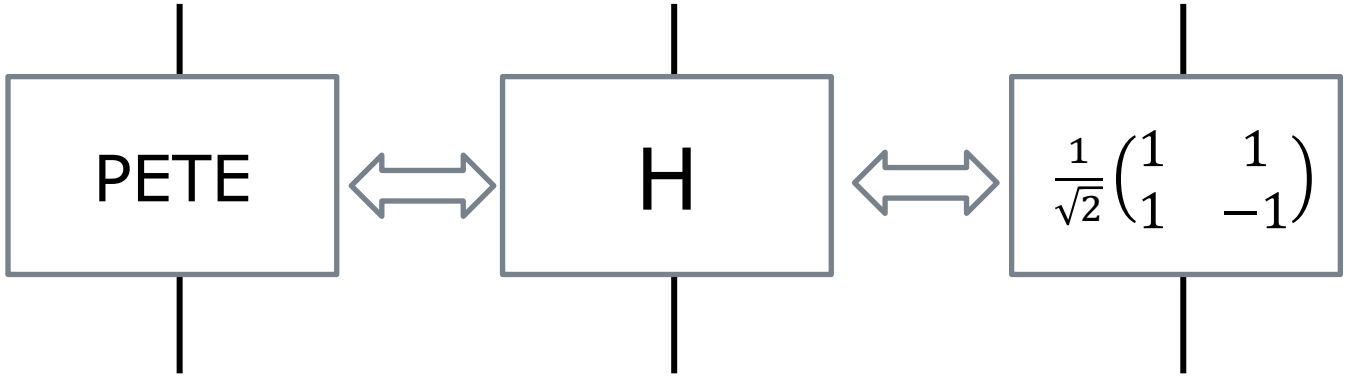


Mach-Zehnder Modulator

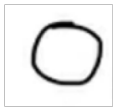

Terry Rudolphの
PETE Boxと超能力者ゲームを
紙と鉛筆で計算する

PETE Box

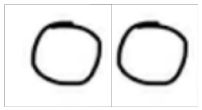
PETE BoxはHadamard ゲートである

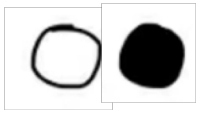


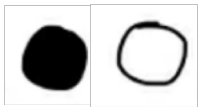
で、

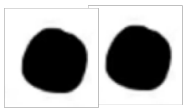
 = |0> = $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

 = |1> = $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

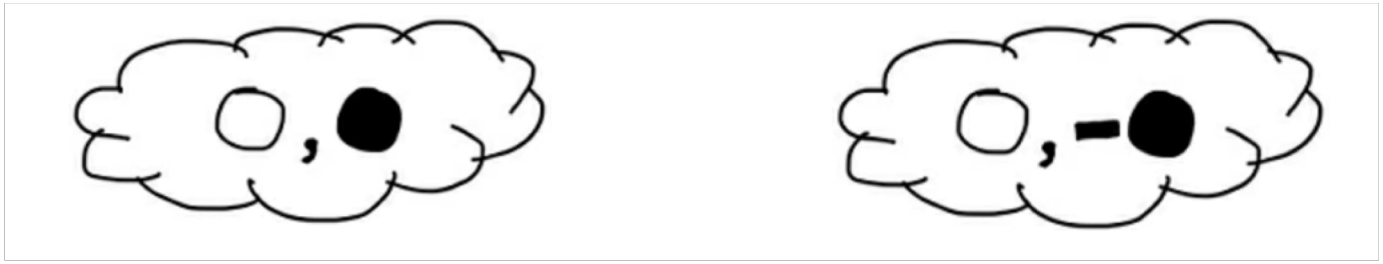
 = |00>

 = |01>

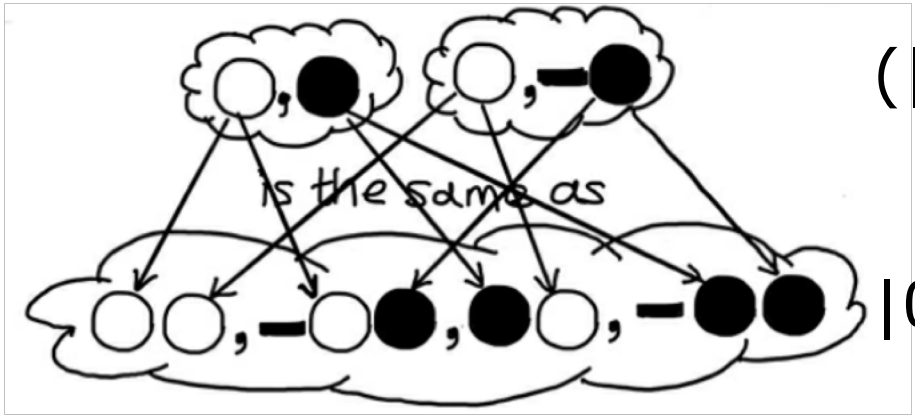
 = |10>

 = |11>

雲はSuperposition である



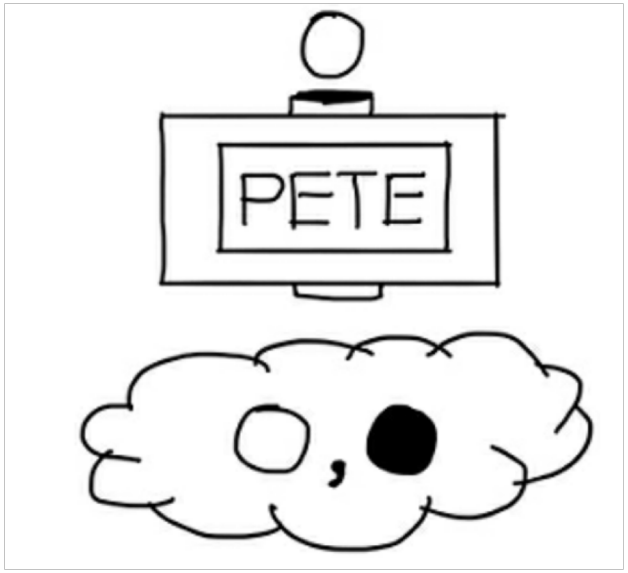
|0> + |1>　　|0> − |1>

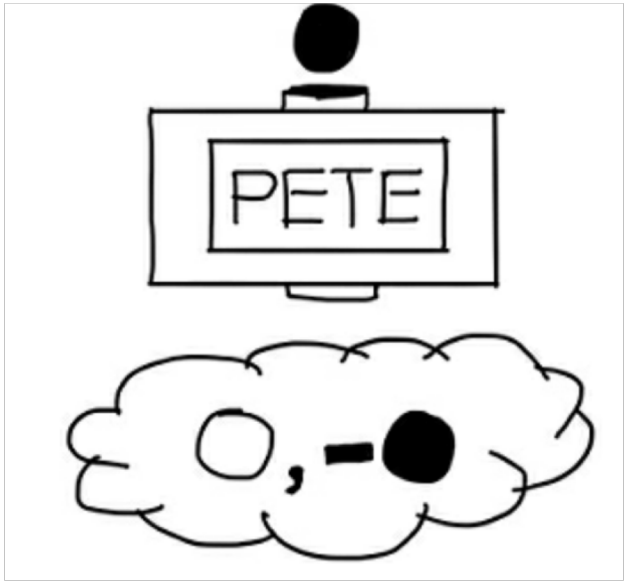


(|0> + |1>)⊗(|0> − |1>)

|00> − |01>+|10> −|11>

と考えると、PETE Box の不思議な振る舞いは、紙と鉛筆で計算可能になる。





PETE

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

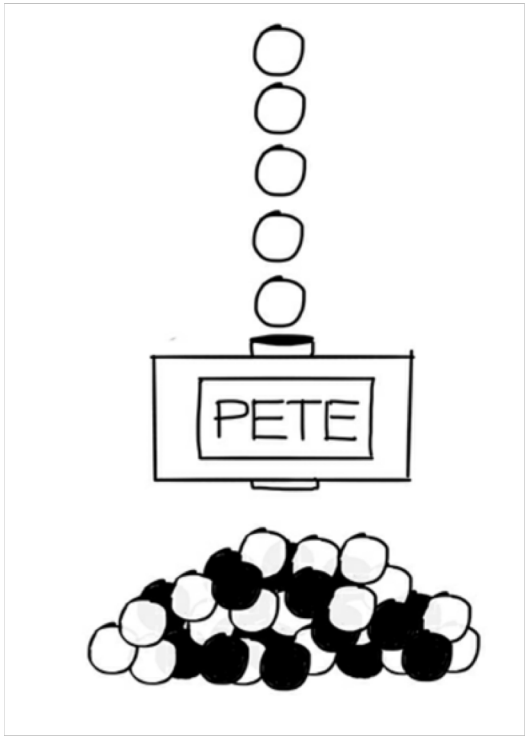
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\{|0>+|1>\}$$

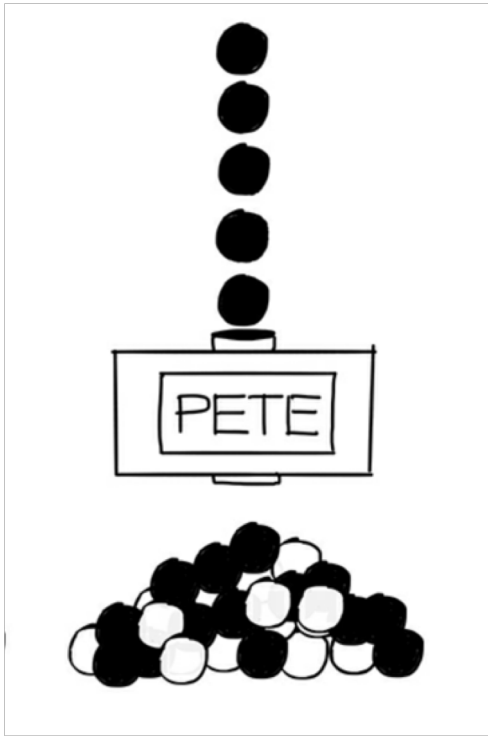
PETE

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\{|0>-|1>\}$$





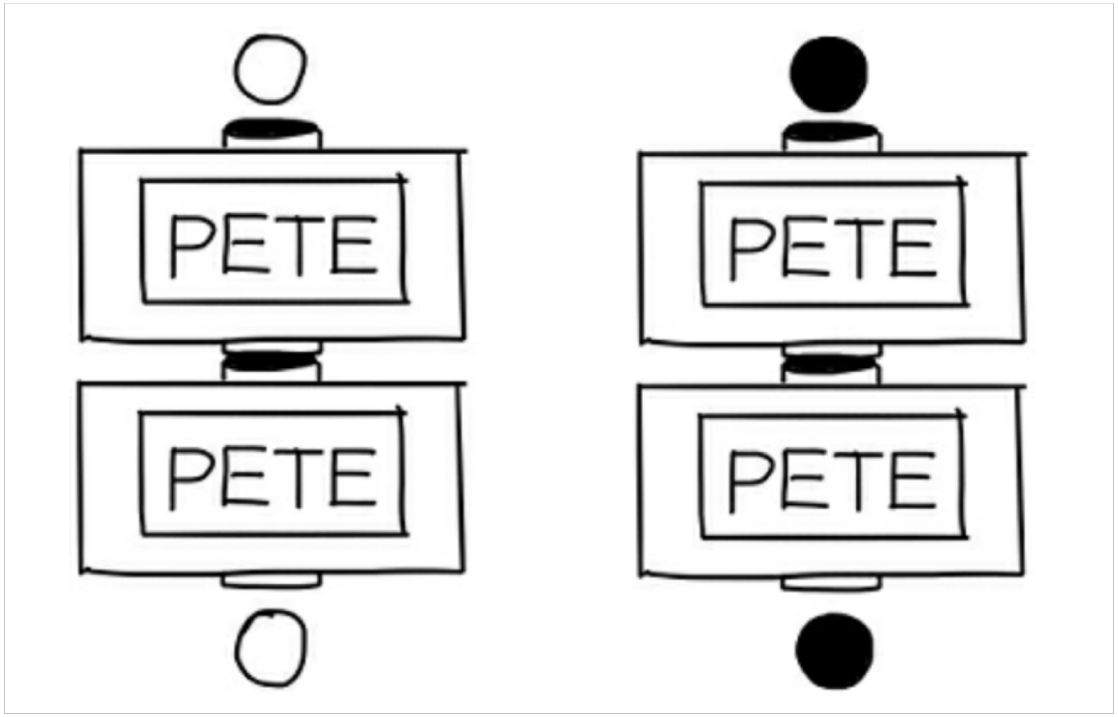
$= \frac{1}{\sqrt{2}}|0> + \frac{1}{\sqrt{2}}|1>$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}|0> - \frac{1}{\sqrt{2}}|1>$

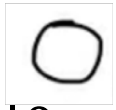
○ $= |0>$ を観測する確率は $|\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = \frac{1}{2}$, $|\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = \frac{1}{2}$

● $= |1>$ を観測する確率は $|\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = \frac{1}{2}$, $|-\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = \frac{1}{2}$

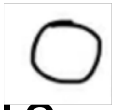
よって、どちらでも白球と黒球のでる確率は等しい



$$H^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$



$$\therefore\ H^2|0> = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} =$$



$|0>$

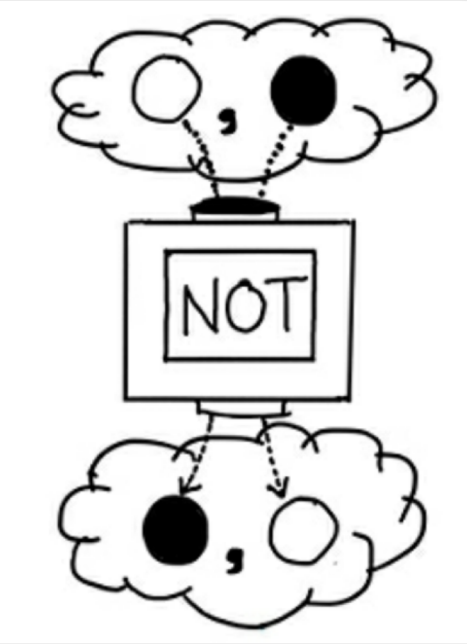


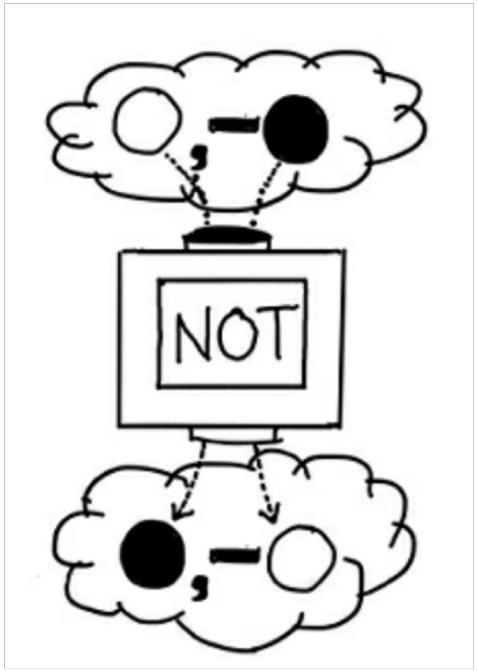
$$H^2|1> = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} =$$



$|1>$

NOT Boxは、Xゲートである





$X(|0>+|1>)= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

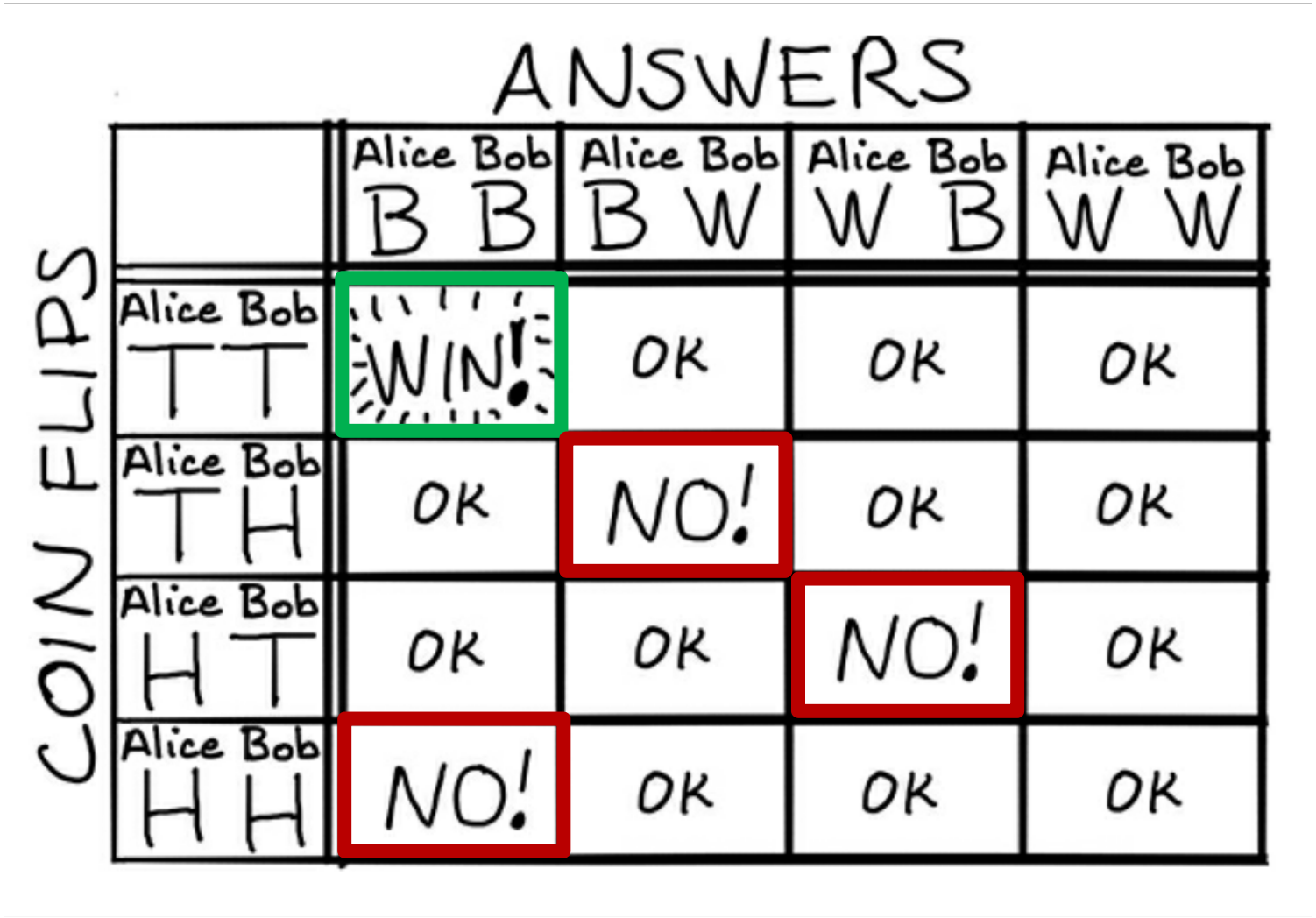
$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = |1>+|0>$

$X(|0>-|1>)= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

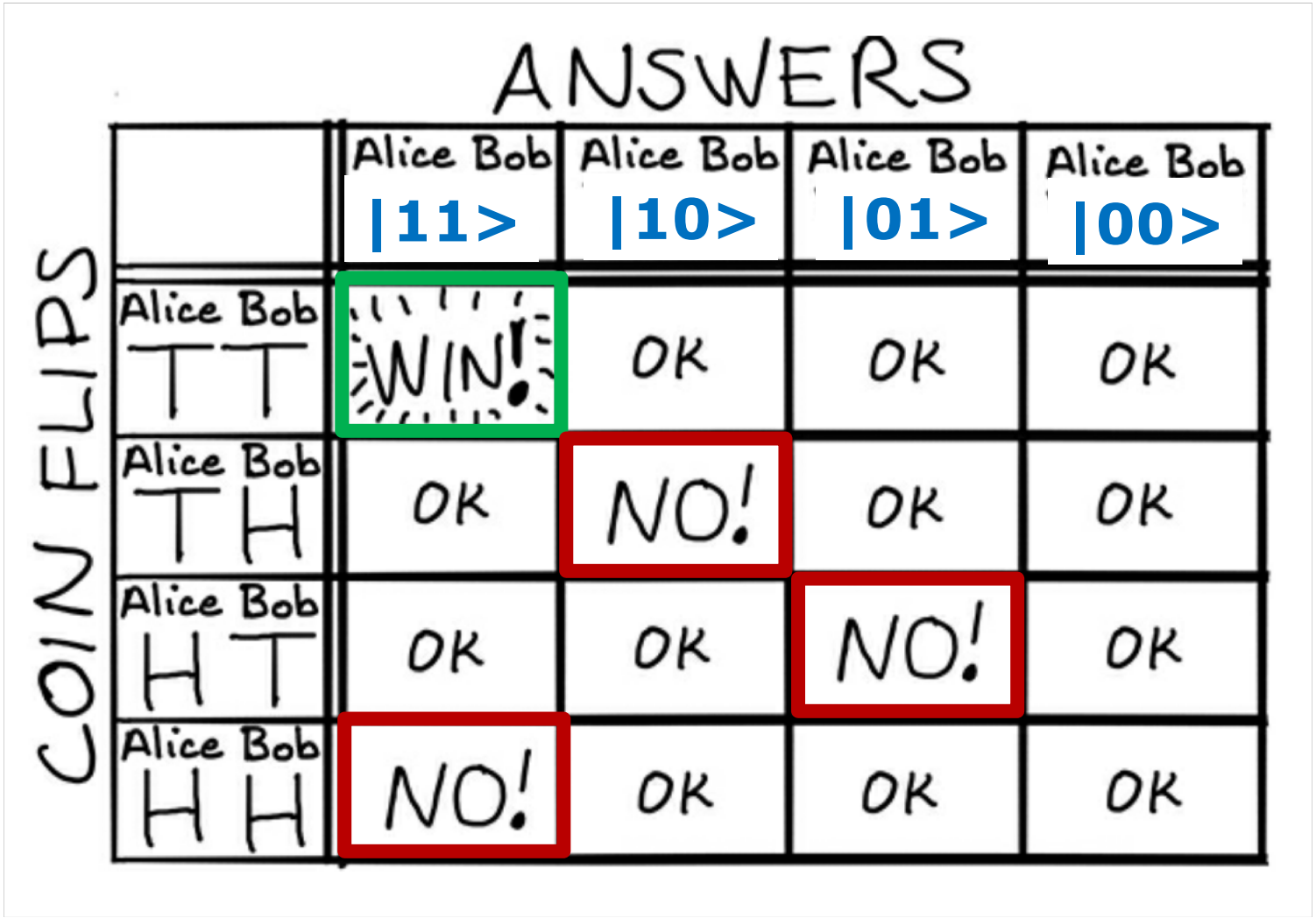
$= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = |1> - |0>$

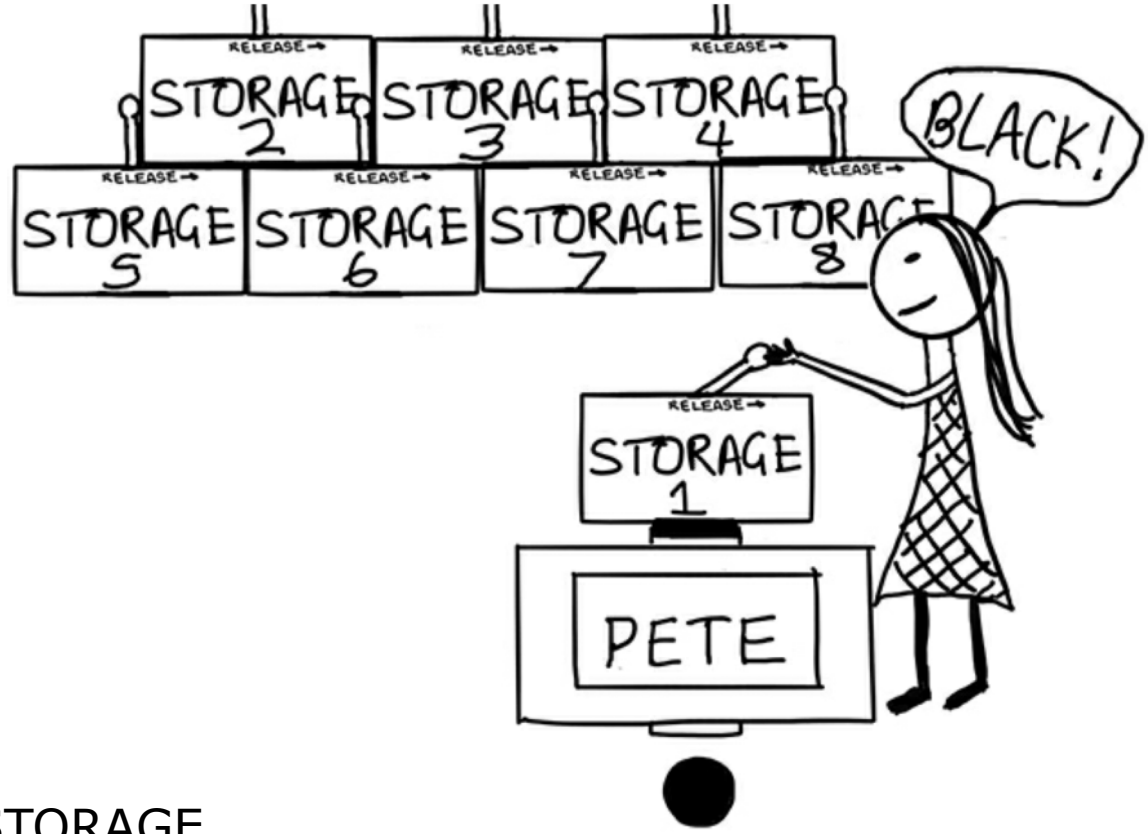
超能力ゲーム

「超能力者」チームが勝つのは緑の場合
胴元が勝つのは、赤の場合である

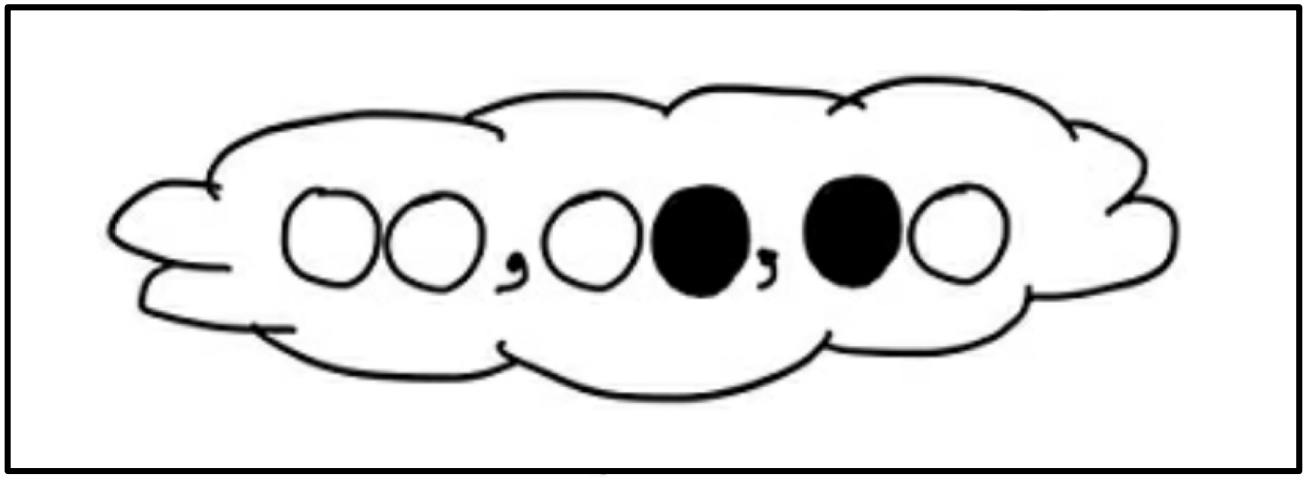


「超能力者」チームが勝つのは緑の場合
胴元が勝つのは、赤の場合である



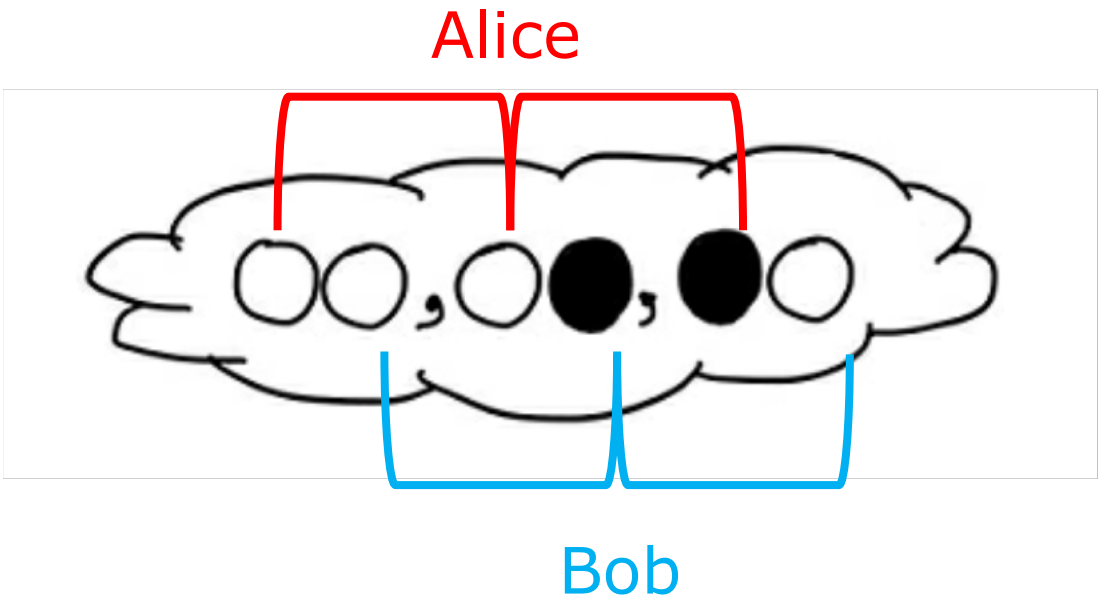

RELEASE
STORAGE 2
STORAGE 3
STORAGE 4
STORAGE 5
STORAGE 6
STORAGE 7
STORAGE 8
BLACK!
STORAGE 1
PETE

STORAGE



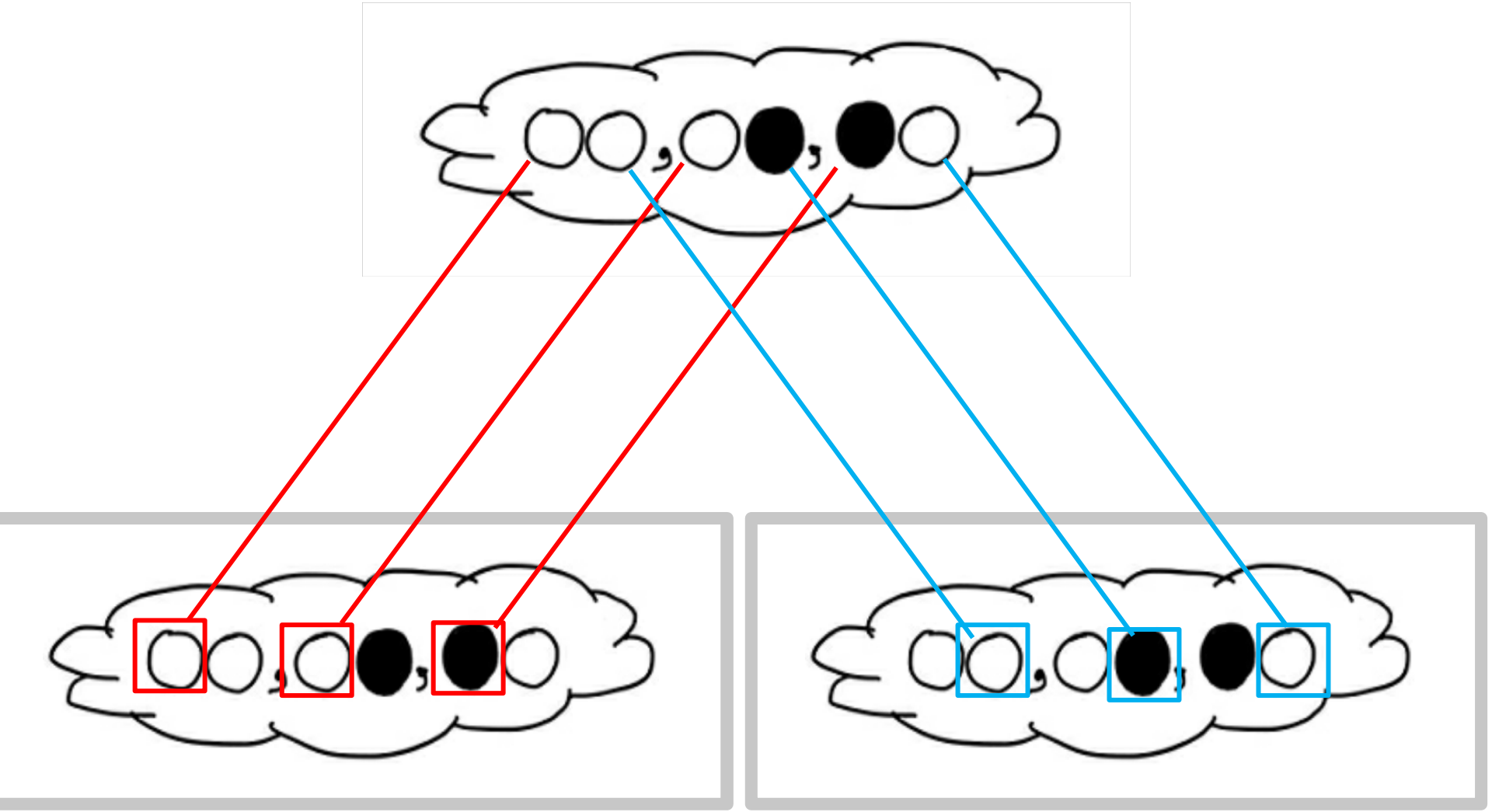
4000個の箱の中身

- 超能力チームが持ち込んだ箱の中身は、



- これは、|00>+|01>+|10> である。

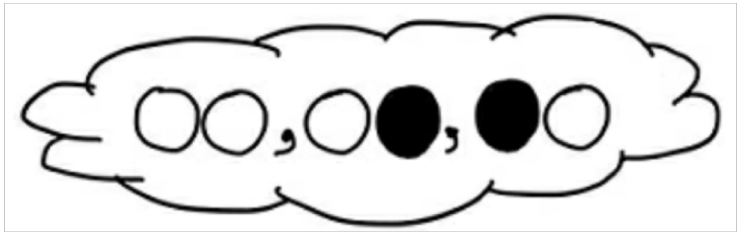
4000個の箱の中身



Aliceの箱

Bobの箱

状態 |00>+|01>+|10>



- この状態は、二つの状態のテンソル積では表せないので、エンタングル状態である。ただ、Bell Stateとは少し異なっている。
- Aliceが|0>を観測したとしよう。
  この時、状態は|00>+|01>に変化する。ただ、この状態では、Bobの状態には、|0>, |1>の二つの可能性がある。
- Aliceが|1>を観測したとしよう。
  この時、状態は|10>に変化する。この時、Bobの状態は|0>に確定する。たしかに、エンタングルしている。
- Bobが|0>を観測したとしよう。
  この時、状態は|00>+|10>に変化する。この時、Aliceの状態には、|0>, |1>の二つの可能性がある。
- Bobが|1>を観測したとしよう。
  この時、状態は|01>に変化する。この時、Aliceの状態は|0>に確定する。たしかに、エンタングルしている。

状態 |00>+|01>+|10>の変化

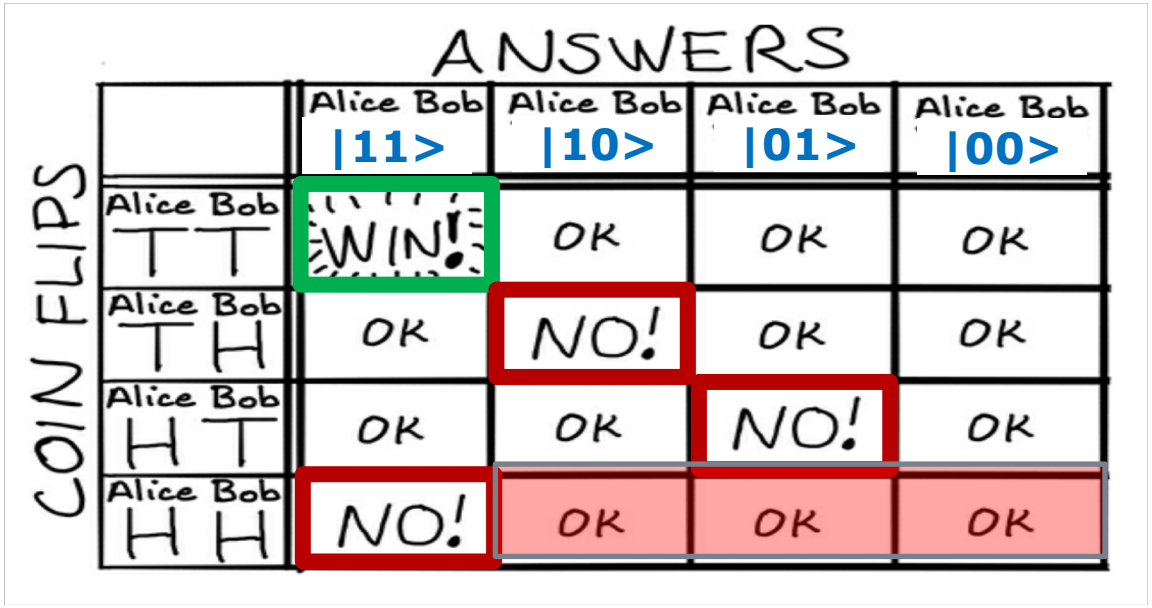
- 何もしないと |00>+|01>+|10> |11>は観測されない。
- Aliceのみが、|00>+|01>+|10>にアダマールHを適用したとしよう。この結果をH_Aとする。
  H_A=(|0>+|1>)|0>+(|0>+|1>)|1>+(|0>−|1>)|0>
  =|00>+|10>+|01>+|11>+|00>−|10>
  =2|00>+|01>+|11> |10>は観測されない。
- Bobのみが、|00>+|01>+|10>にアダマールHを適用したとしよう。この結果をH_Bとする。
  H_B=|0>(|0>+|1>)+|0>(|0>−|1>)+|1>(|0>+|1>)
  =|00>+|01>+|00>−|01>+|10>+|11>
  =2|00>+|10>+|11> |01>は観測されない。
- AliceとBobの双方が|00>+|01>+|10>にアダマールHを適用したとしよう。この結果をH_{AB}とする。
  H_{AB}=(|0>+|1>)(|0>+|1)+(|0>+|1>)(|0>−|1>)
  +(|0>−|1>)(|0>+|1>) =3|00>+|01>+|10>−|11>
  |11>は観測される可能性がある

AliceもBobも表の場合

二人は何もしないで直接箱を見る。

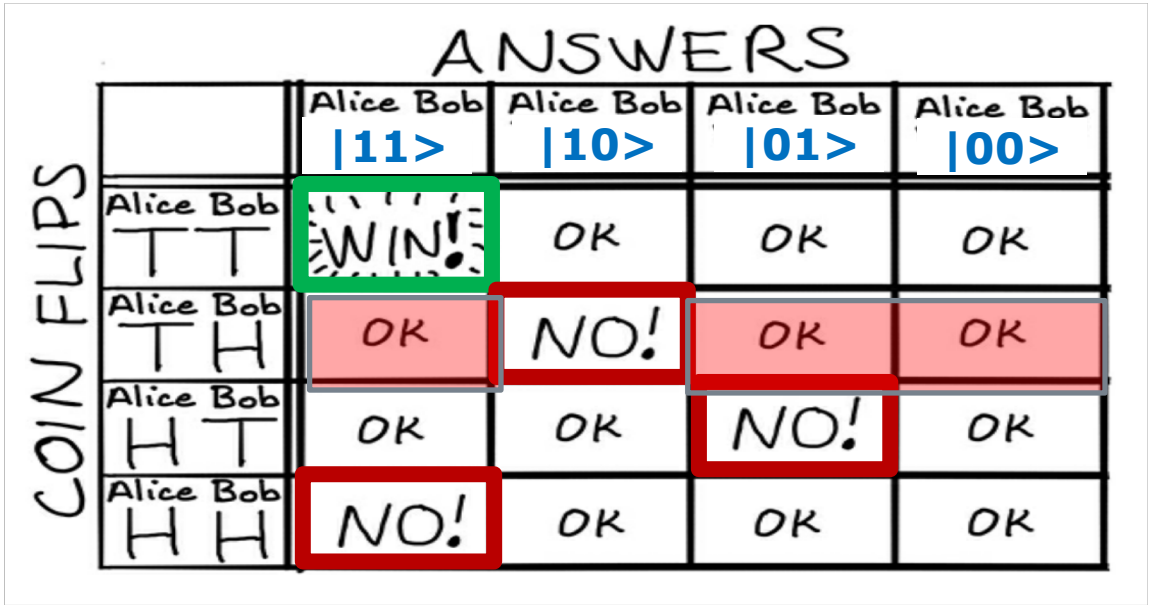
Aliceは、|00>+|01>+|10> の第一qubitを観測し、
Bobは、 |00>+|01>+|10> の第二qubitを観測する。

どの場合でも、|11>を観測することはない。



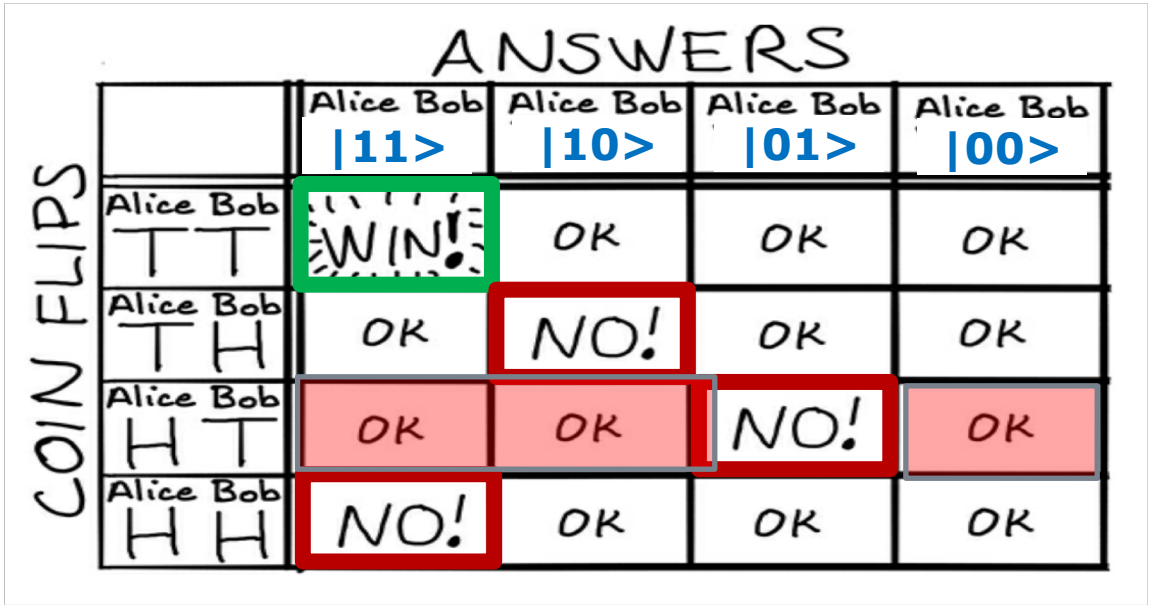
Aliceが裏で、Bobが表の場合

Aliceは、 |00>+|01>+|10> の第一qubitに、Hを適用する。
H|0>=|0>+|1>, H|1>=|0>−|1>だから、Aliceが観測するのは、次の第一qubitである。
(|0>+|1>)⊗|0>+(|0>+|1>)⊗|1>+ (|0>−|1>)⊗|0>
= |00>+|10>+|01>+|11>+|00>−|10>
= 2|00>+|01>+|11>
|10>は観測されない。



Aliceが表で、Bobが裏の場合

Bobは、 |00>+|01>+|10> の第二qubitに、Hを適用する。
Bobが観測するのは、次の第二qubitである。
|0>⊗(|0>+|1>)+|0> ⊗ (|0> − |1>)+ |1> ⊗ (|0>+|1>)
= |00>+|01>+|00> − |01>+|10>+|11>
= 2|00>+|10>+|11>
|01>は観測されない。

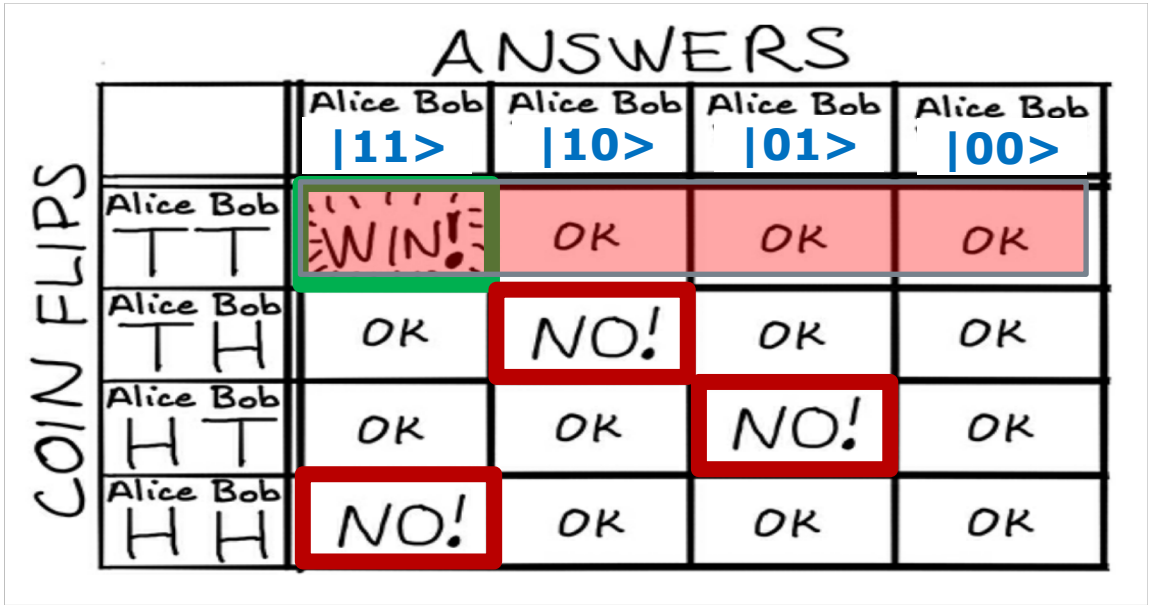


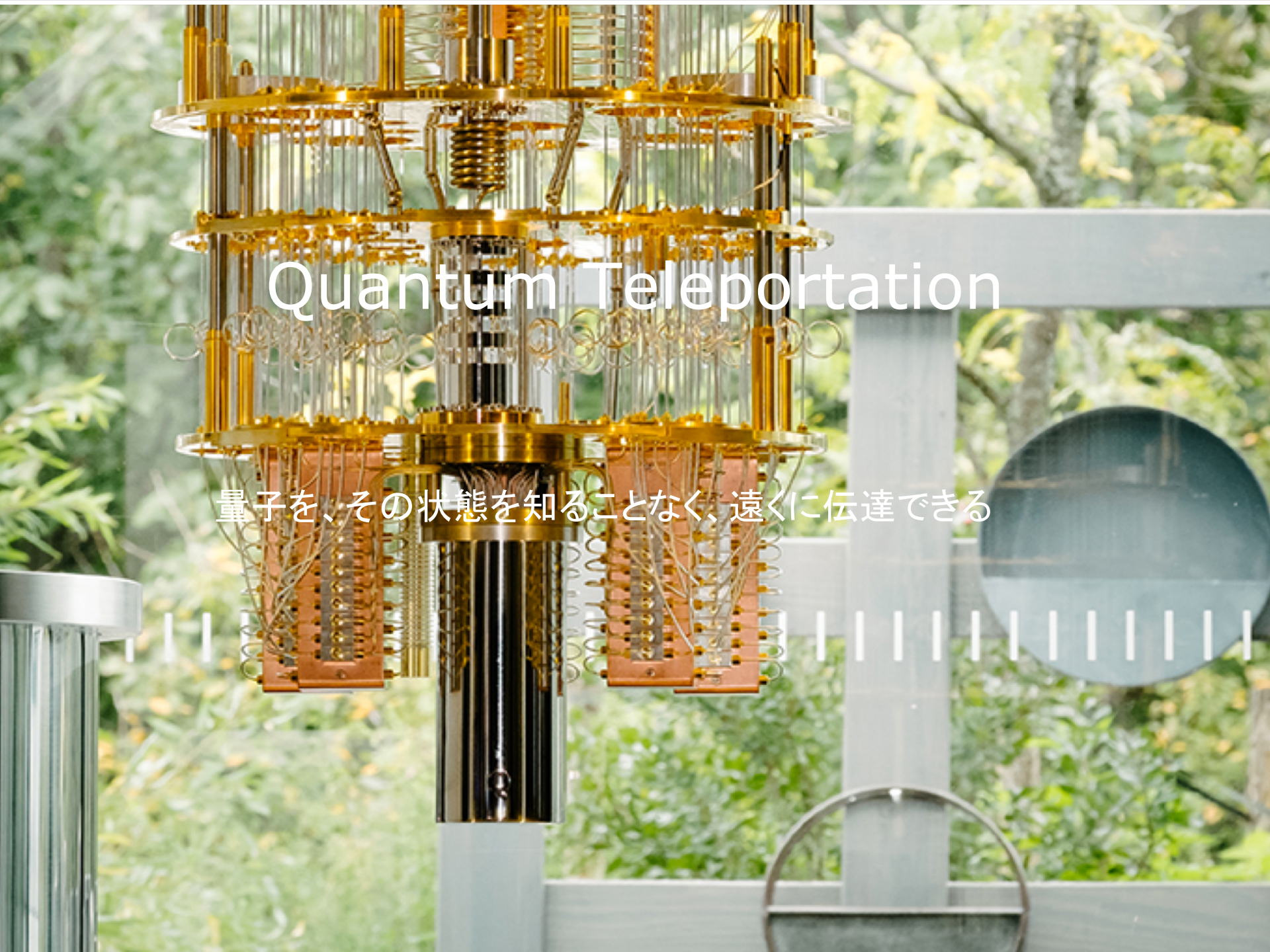
AliceもBobも裏の場合

Alice は、|00>+|01>+|10> の第一qubitに、
Bobは、|00>+|01>+|10> の第二qubitに、Hを適用する。

$(|0\rangle+|1\rangle)\otimes(|0\rangle+|1\rangle)+(|0\rangle+|1\rangle)\otimes(|0\rangle-|1\rangle)$
$+(|0\rangle-|1\rangle)\otimes(|0\rangle+|1\rangle)$
$= |00\rangle+|01\rangle+|10\rangle+|11\rangle$
$+|00\rangle-|01\rangle+|10\rangle-|11\rangle$
$+|00\rangle+|01\rangle-|10\rangle-|11\rangle$
$= 3|00\rangle+|01\rangle+|10\rangle-|11\rangle$

いつか|11>を観測するチャンスがある。




Quantum Teleportation
量子を、その状態を知ることなく、遠くに伝達できる

量子テレポーテーション

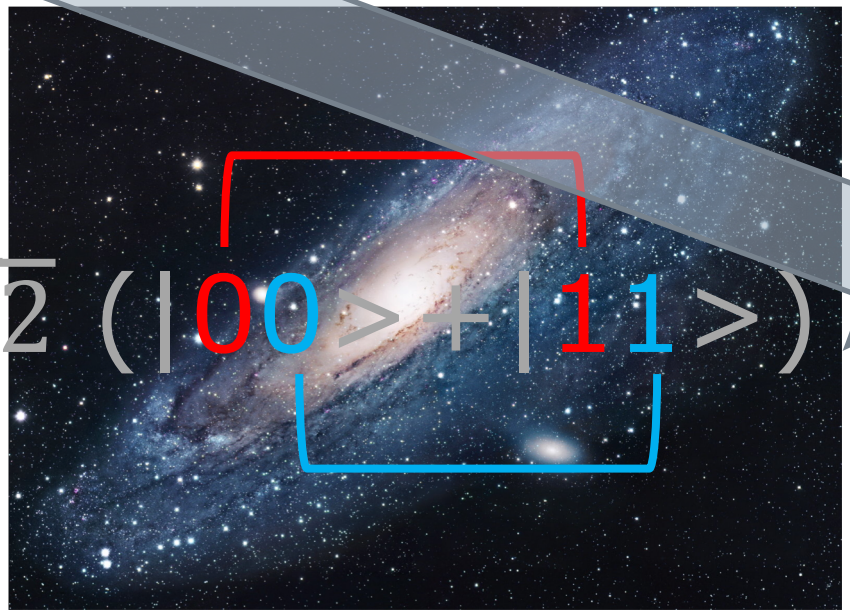
- AliceとBobは、ずいぶん昔にあっていたのだが、今は、遠くに離れて住んでいる。
- 一緒にいた時に、EPRペアを作って、別れる時に、それぞれがEPRペアの一つのqubitを持つようにした。
- 数年経ってから、Bobは遠くにいるのだが、Aliceのミッションは受け取ったqubit $|\psi\rangle$をBobに送ることだった。
- 彼女は、qubitの状態を知らない。さらに、Bobには、古典的な手段でしか情報を送れない。
- この時、Aliceは、このミッションを遂行できるだろうか？

量子テレポーテーション

$|\Psi\rangle$

Alice

$1/\sqrt{2}\ (|00\rangle+|11\rangle)$



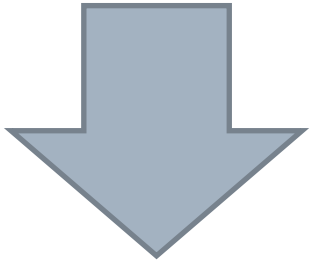
$|\Psi\rangle$?

Bob

$1/\sqrt{2}\ (|00\rangle+|11\rangle)$

量子テレポーテーションが可能とすること

- Aliceは、Bobに送らなければならない そのqubit $|\Psi\rangle$ の状態を知らない。知ろうとして、それを観測すれば、その状態は失われてしまう。
- たとえ彼女が$|\Psi\rangle$の状態を知っていたとしても、 $|\Psi\rangle$の状態を正確に記述するには、無限の量の古典情報が必要になる。それをBobに伝えるには無限の時間が必要になる。



- 量子テレポーテーションは、エンタングルしたEPRペアを利用して、ほんの少しの古典的コミュニケーションの手間だけで、AliceがBobに $|\Psi\rangle$ の状態を送ることを可能にする。

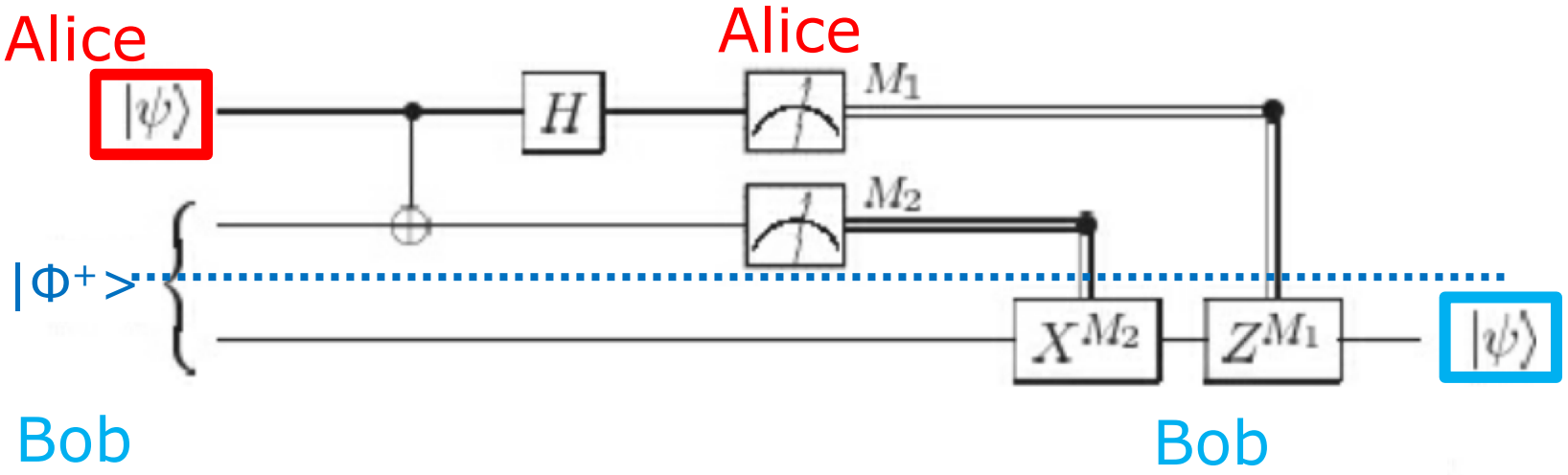
量子テレポーテーション
Aliceが行うこと

- Aliceは、彼女の持つEPRペアの片方に作用して、彼女が持つ二つのqubitを測定して、四つの可能な古典的結果 00, 01, 10, 11 を得る。
- 彼女は、この情報を、古典的な手段でBobに送る。
- Aliceの古典的なメッセージに基づいて、Bobは四つのうち一つの操作を選んで彼のEPRペアの片方に適応する。
- 驚くべきことに、それだけで、Bobはオリジナルの状態 $|\Psi\rangle$ を復元できるのである。

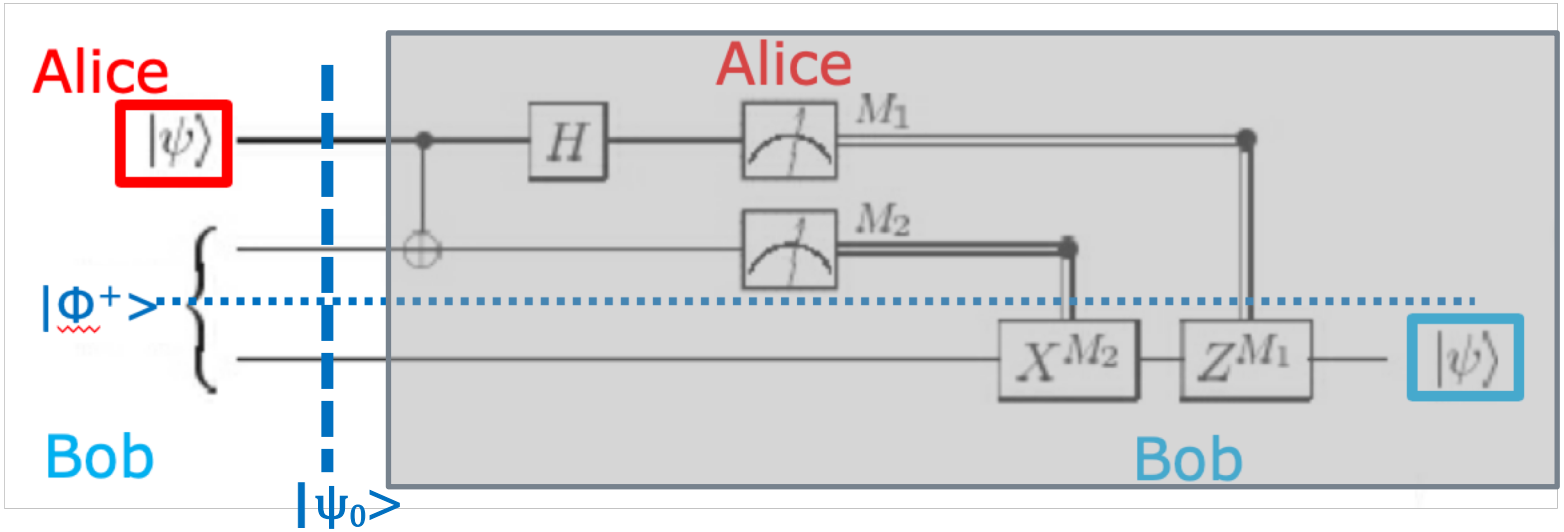
量子テレポーテーション
Bobが行うこと

- Aliceの出力の測定に従って、Bobのqubitは四つの可能な状態をとることがわかる。
- もちろん、どの状態にあるかを知るためには、BobはAliceの測定の結果を知らされていなければならない。この事実によって、情報の伝達が光より速くなることは避けられることになる。
- いったんBobが測定の結果を知れば、Bobはその状態を、適当な量子ゲートを適応して「修正」して$|\Psi\rangle$を復活できる。
- 例えば、測定の結果が00であれば、Bobは何もする必要はない。測定が01の時には、Xゲートを適用すればいい。10ならZゲートを適用すればいい。もし、11ならば、最初にXゲートを、続いてZゲートを適用すればいい。

量子テレポーテーションを実現する回路



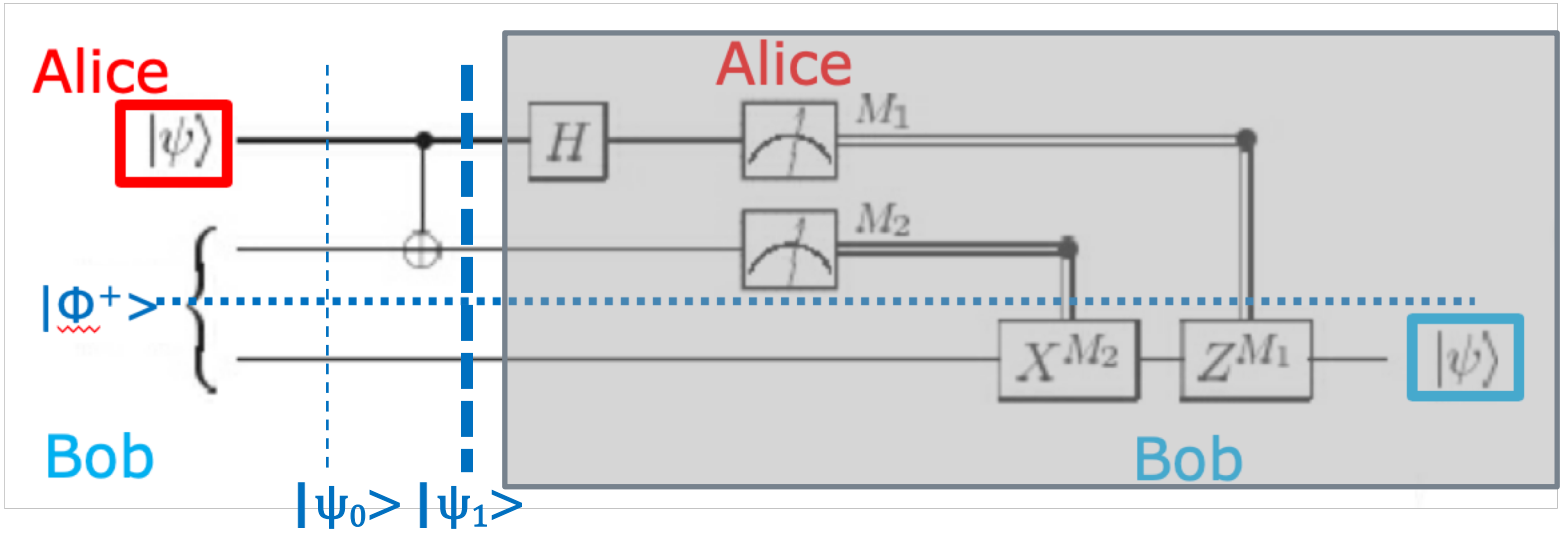
この回路図は、横長に書かれているが、通信が行われるのは、AliceからBobへ、縦方向に行われることに注意。また、すでにAliceとBobは、エンタングル状態にあることが前提されている。（図の$|\Phi^+\rangle$がそれを表している。）



$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$, $|\Phi^+\rangle = 1/\sqrt{2}\,(|00\rangle + |11\rangle)$ とすると。

$$|\psi_0\rangle = |\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle$$
$$= (\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle) \otimes 1/\sqrt{2}\,(|00\rangle + |11\rangle)$$
$$= 1/\sqrt{2}\,(\alpha|0\rangle \otimes(|00\rangle +|11\rangle)+\beta|1\rangle\otimes(|00\rangle + |11\rangle))$$

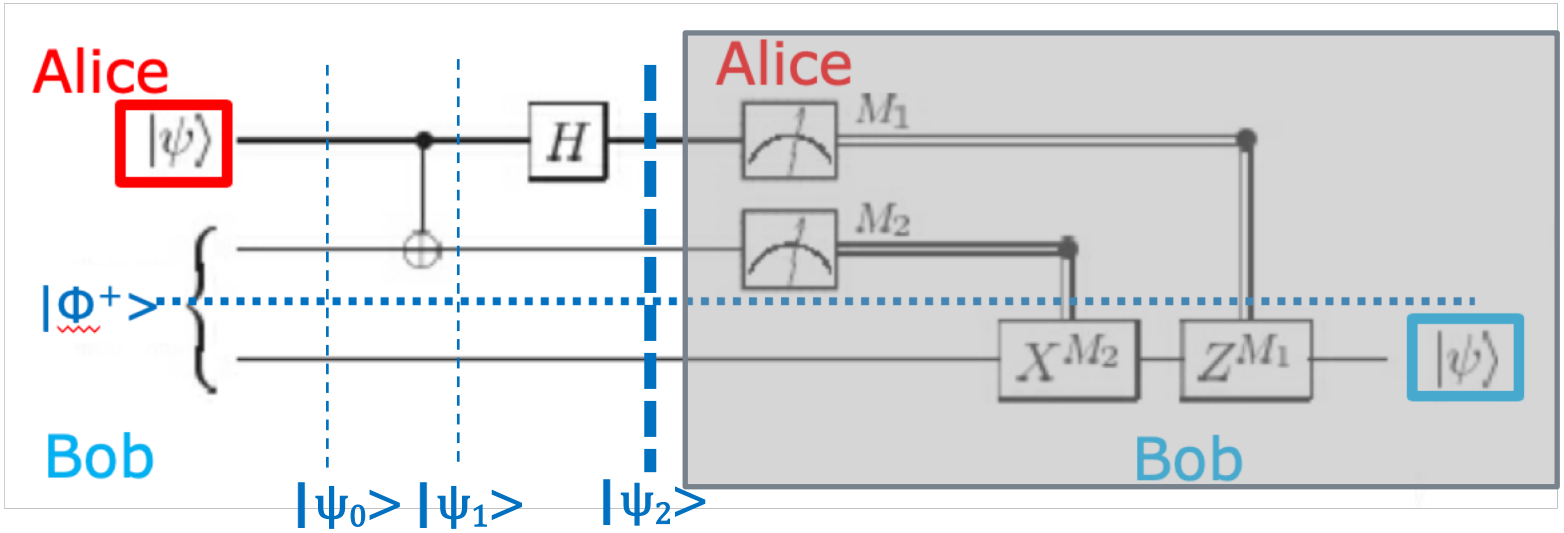
回路に入る直前の $|\psi_0\rangle$段階でのシステムの状態



$$|\psi_0\rangle = 1/\sqrt{2}\,(\alpha|0\rangle \otimes(|00\rangle + |11\rangle) + \beta|1\rangle \otimes(|00\rangle + |11\rangle))$$

$$|\psi_1\rangle = 1/\sqrt{2}\,(\alpha|0\rangle \otimes(|00\rangle + |11\rangle) + \beta|1\rangle \otimes(|10\rangle + |01\rangle))$$

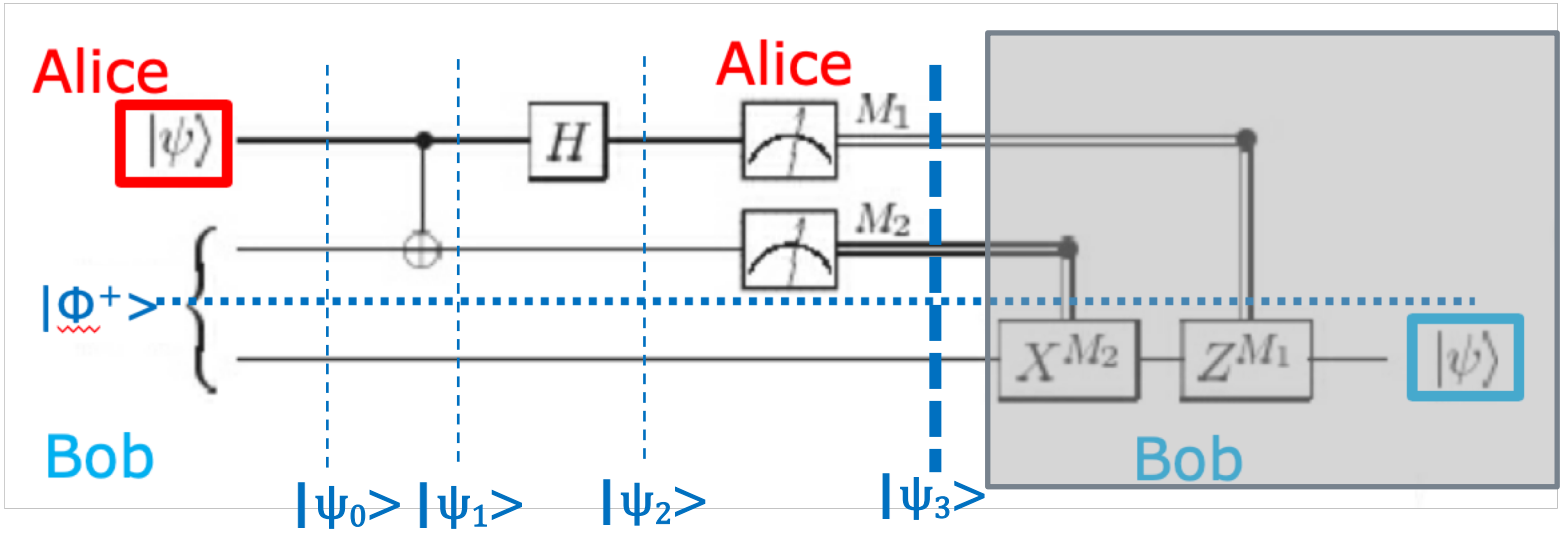
回路上のCNOTを実行した直後の $|\psi_1\rangle$段階でのシステムの状態



$$|\psi_0\rangle = 1/\sqrt{2}\,(\alpha|0\rangle \otimes(|00\rangle + |11\rangle) + \beta|1\rangle \otimes(|00\rangle + |11\rangle))$$

$$|\psi_1\rangle = 1/\sqrt{2}\,(\alpha|0\rangle \otimes(|00\rangle + |11\rangle) + \beta|1\rangle \otimes(|10\rangle + |01\rangle))$$

$$\begin{aligned}|\psi_2\rangle &= 1/\sqrt{2}\,(\alpha(|0\rangle+|1\rangle)\otimes(|00\rangle + |11\rangle) + \\ &\qquad \beta(|0\rangle-|1\rangle)\otimes(|10\rangle + |01\rangle)\,) \\ &= 1/\sqrt{2}\,(\alpha(|000\rangle+|011\rangle+|100\rangle+|111\rangle) + \\ &\qquad \beta(|010\rangle+|001\rangle-|110\rangle-|101)\,) \\ &= 1/\sqrt{2}\,(|00\rangle(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)+|01\rangle(\alpha|1\rangle+\beta|0\rangle) + \\ &\qquad |10\rangle(\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle)+|11\rangle\,(\alpha|1\rangle-\beta|0\rangle)\,)\end{aligned}$$

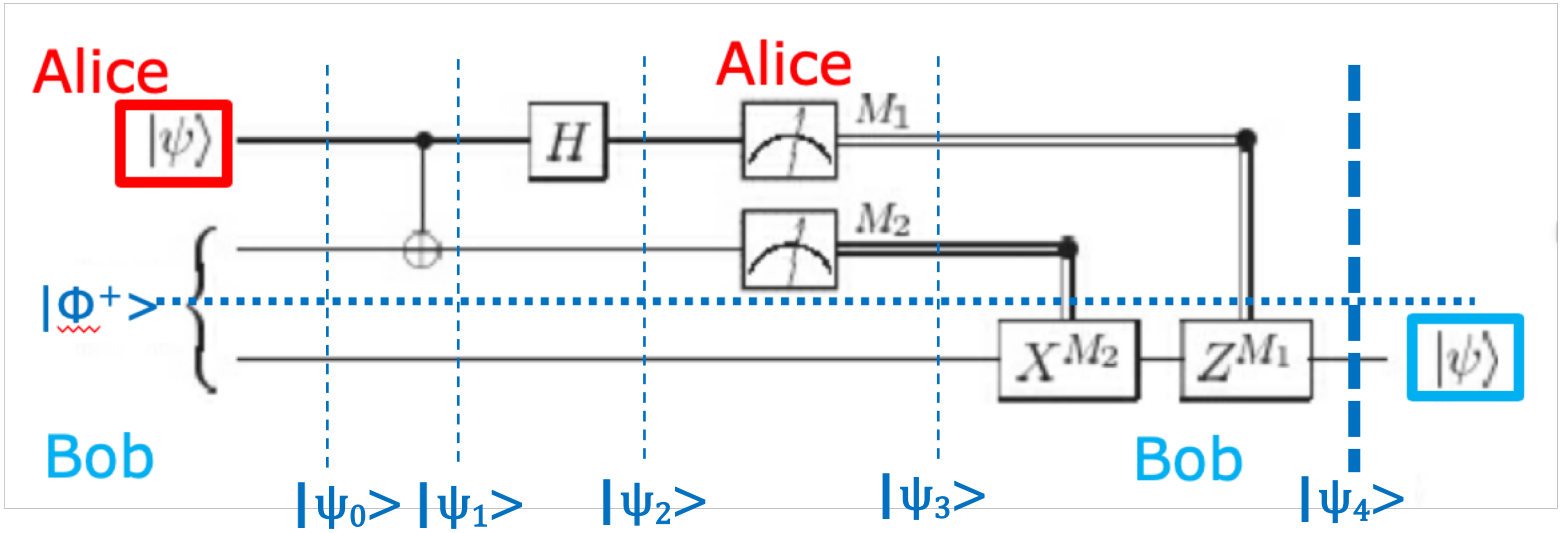


$$|\psi_0\rangle = 1/\sqrt{2}\,(\alpha|0\rangle \otimes(|00\rangle + |11\rangle) + \beta|1\rangle \otimes(|00\rangle + |11\rangle))$$

$$|\psi_1\rangle = 1/\sqrt{2}\,(\alpha|0\rangle \otimes(|00\rangle + |11\rangle) + \beta|1\rangle \otimes(|10\rangle + |01\rangle))$$

$$|\psi_2\rangle = 1/\sqrt{2}\,(|00\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |01\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) + |10\rangle(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) + |11\rangle\,(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)\,)$$

$$|\psi_3(00)\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$$
$$|\psi_3(01)\rangle = (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)$$
$$|\psi_3(10)\rangle = (\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle)$$
$$|\psi_3(11)\rangle = (\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)$$



$|\psi_3(00)\rangle = (\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)$
$|\psi_3(01)\rangle = (\alpha|1\rangle+\beta|0\rangle)$
$|\psi_3(10)\rangle = (\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle)$
$|\psi_3(11)\rangle = (\alpha|1\rangle-\beta|0\rangle)$

$|\psi_4(00)\rangle = \psi_3(00)\rangle = (\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)$
$|\psi_4(01)\rangle = X\,|\psi_3(01)\rangle = X(\alpha|1\rangle+\beta|0\rangle)=(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)$
$|\psi_4(10)\rangle = Z|\psi_3(10)\rangle = Z(\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle)=(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)$
$|\psi_4(11)\rangle = ZX|\psi_3(11)\rangle = ZX\,(\alpha|1\rangle-\beta|0\rangle)=(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)$

$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$

いくつかの疑問

- 第一。量子テレポーテーションは、光より早く量子状態を送ることができるのだろうか？
  これに対する答えは、明確にノーだ。テレポーテーションを実行するためには、Aliceは観測結果を、古典的な通信路で、Bobに送らなければならないのだから。

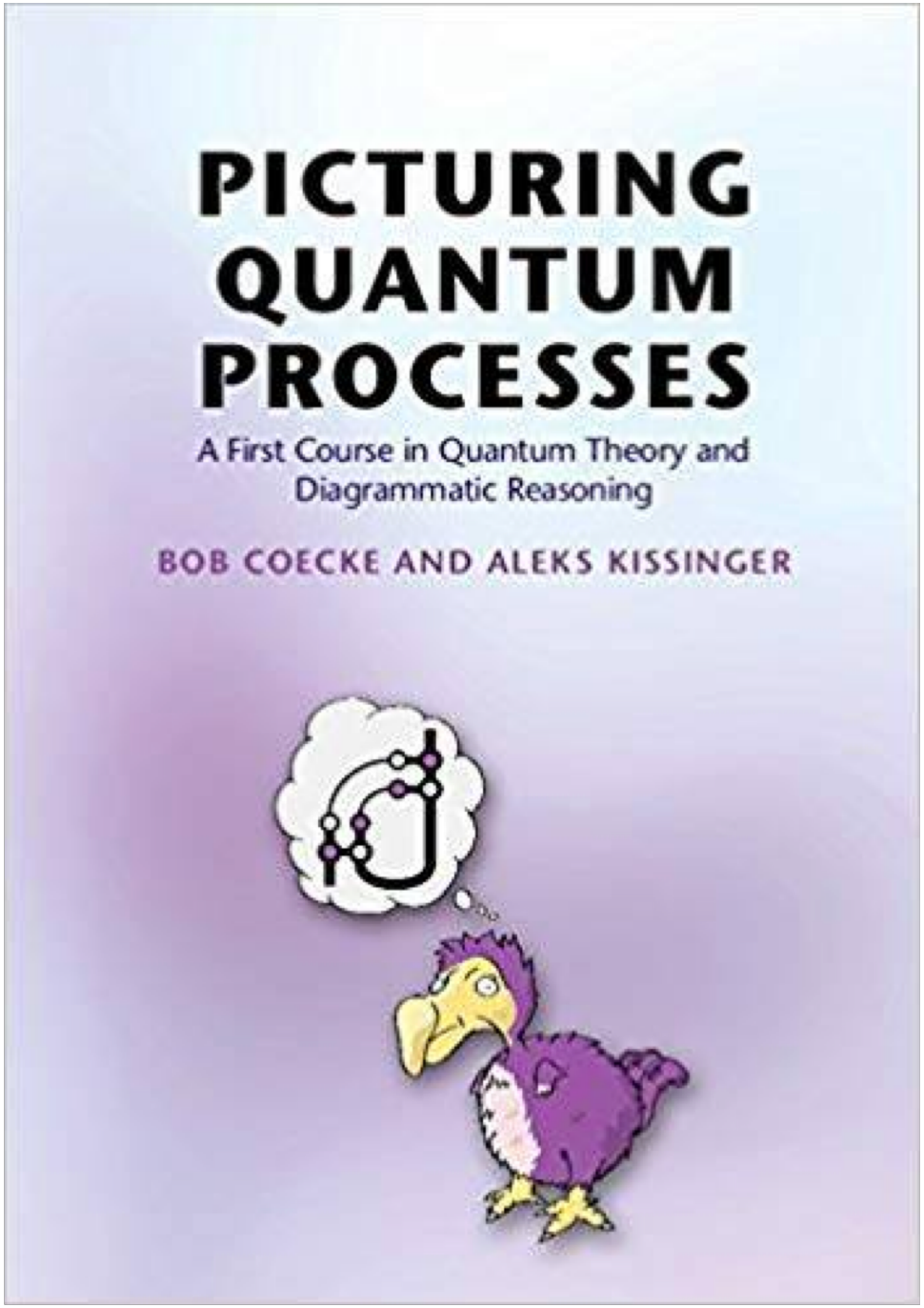
- 第二。量子テレポーテーションは、未知の量子状態のコピーを禁じたNo Cloning定理を破ることにならないか？
  これについても、答えはノーだ。Bobのもとで、量子状態は再現されるのだが、Aliceのもとにあったオリジナルの量子状態は、Aliceの観測によって、|0>か|1>かの状態に変わって、失われている。



Bob Coeckeのアプローチ

“Picturing Quantum Processes”

https://goo.gl/hmRkKy



A First Course in Quantum Theory and Diagrammatic Reasoning

https://goo.gl/hmRkKy

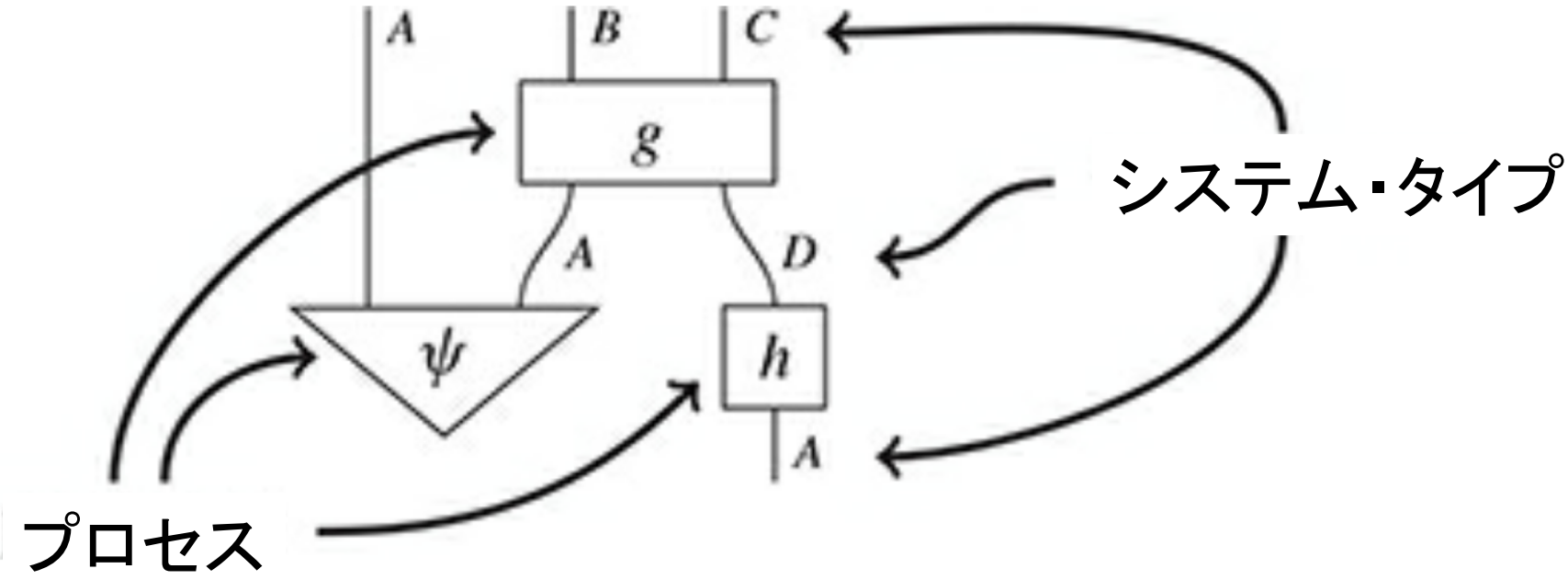


これは、実は、量子テレポーションを
教えているところである


String Diagram入門

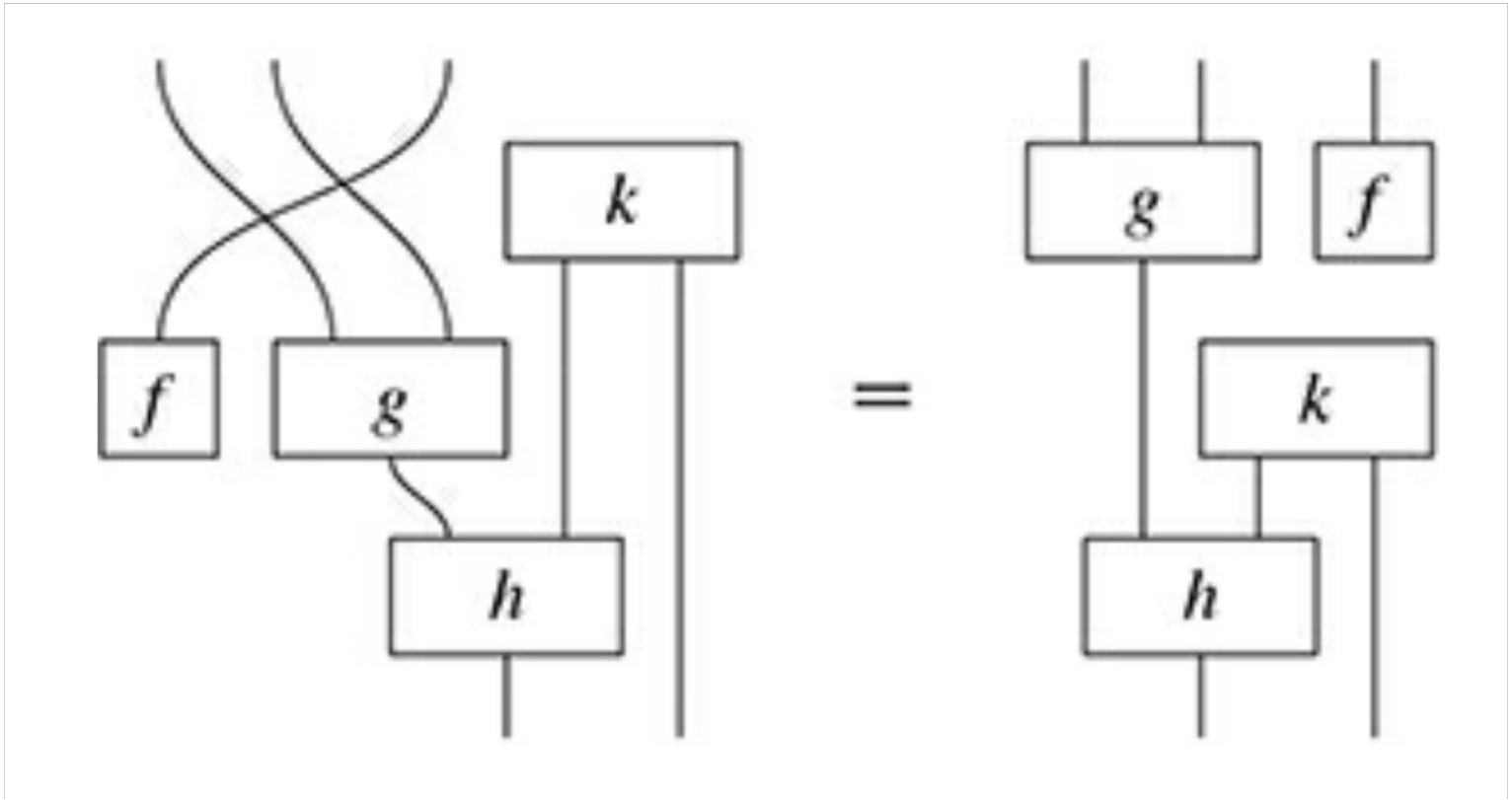
Diagramの例

Diagram（ダイアグラム）



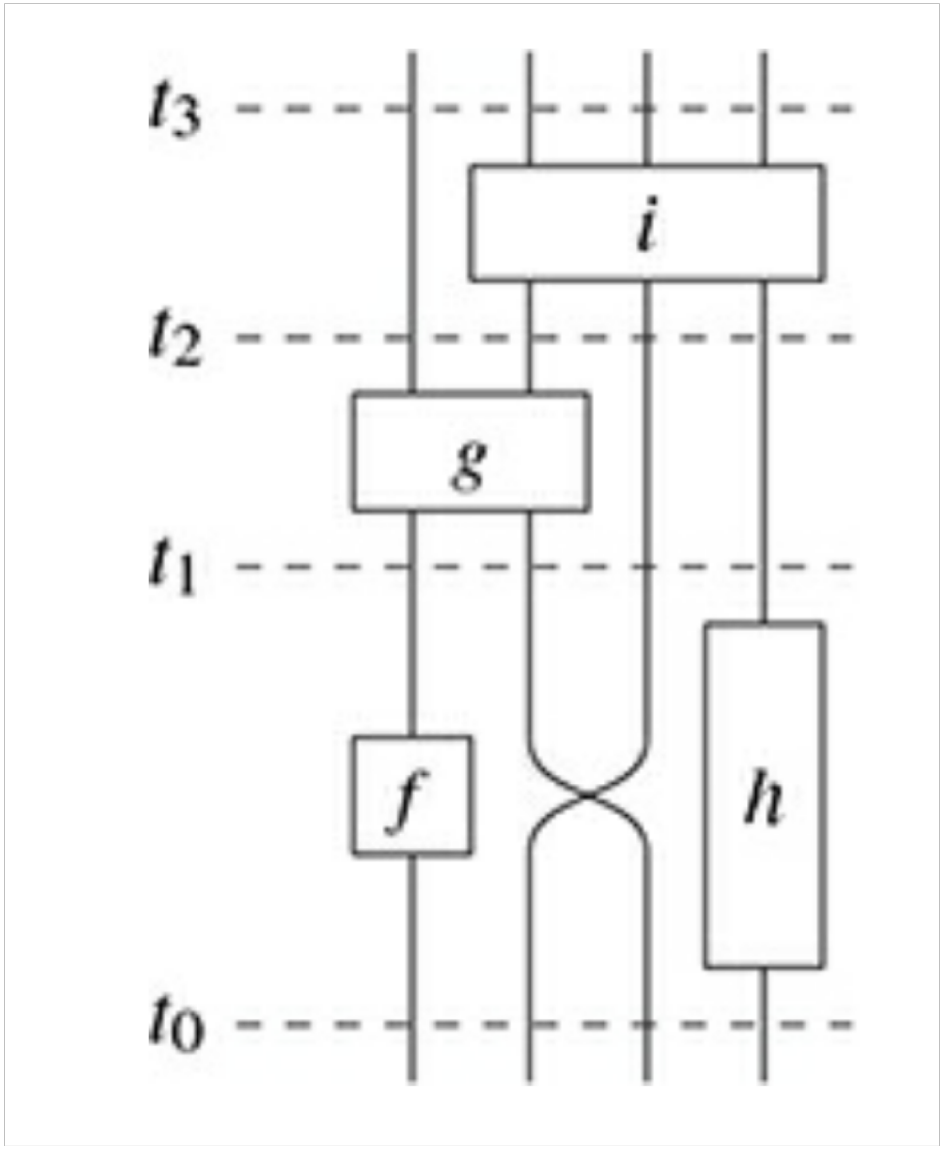
ダイアグラムは「箱」と「ワイアー」からできている。
それぞれ、「プロセス」と「システム」を表している。

Diagramの黄金律
どうつながっているかだけが重要



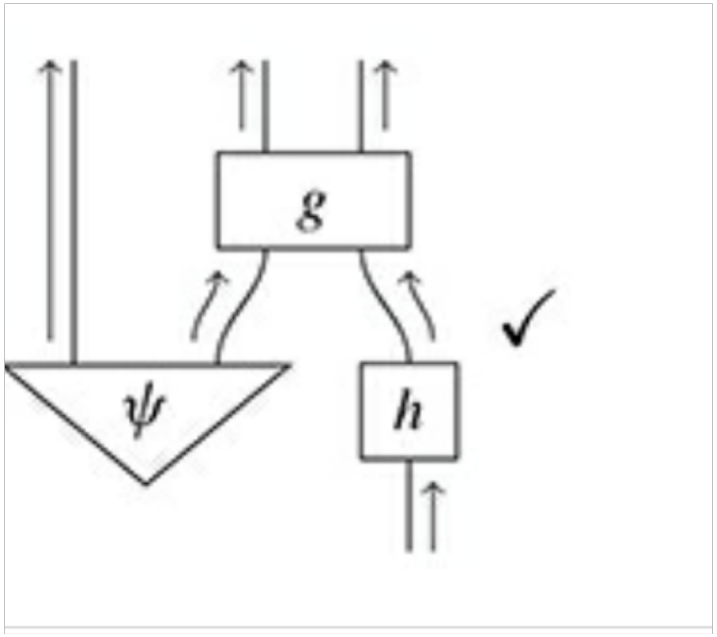
未来と過去

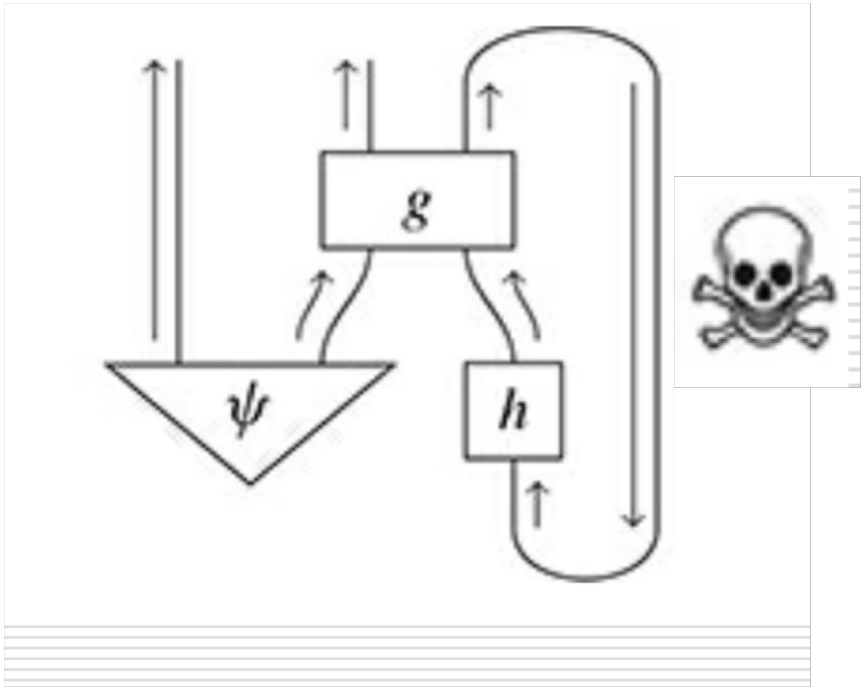
Diagramは、時間のステップにそって組織される



時間の流れ

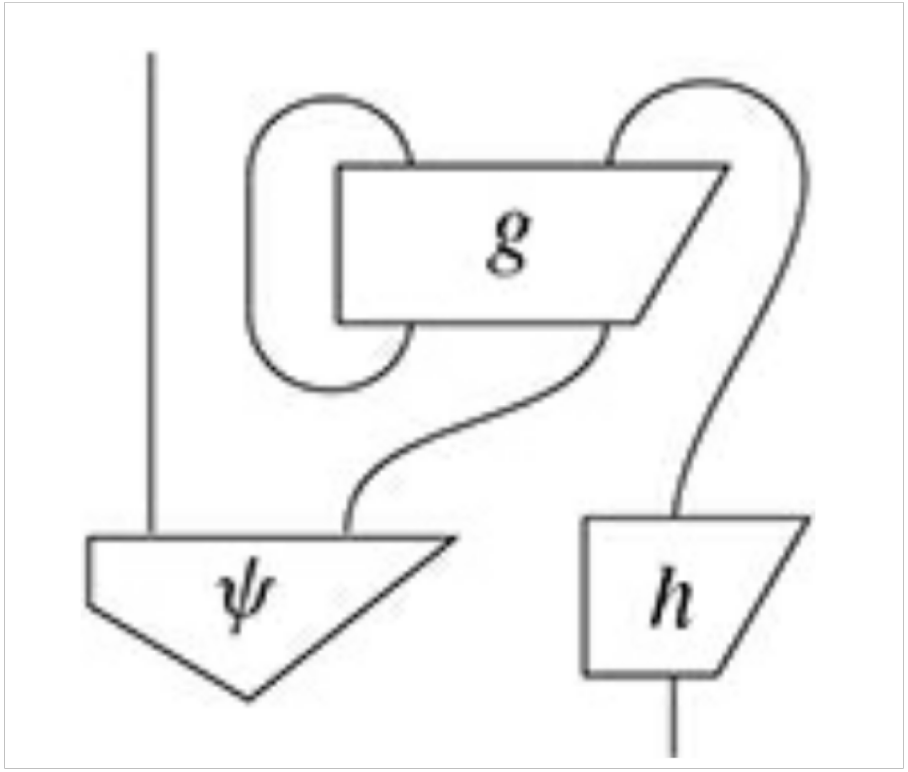
回路のDiagram
ループを含んでいてはいけない



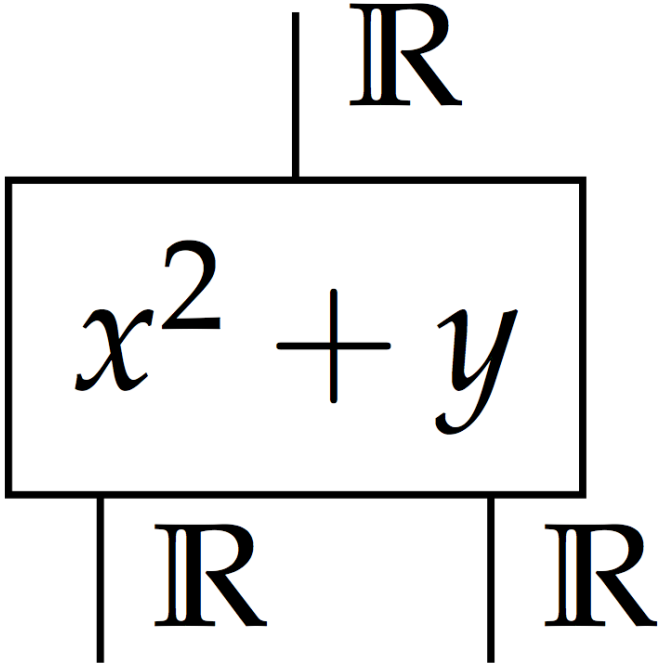


String Diagrams

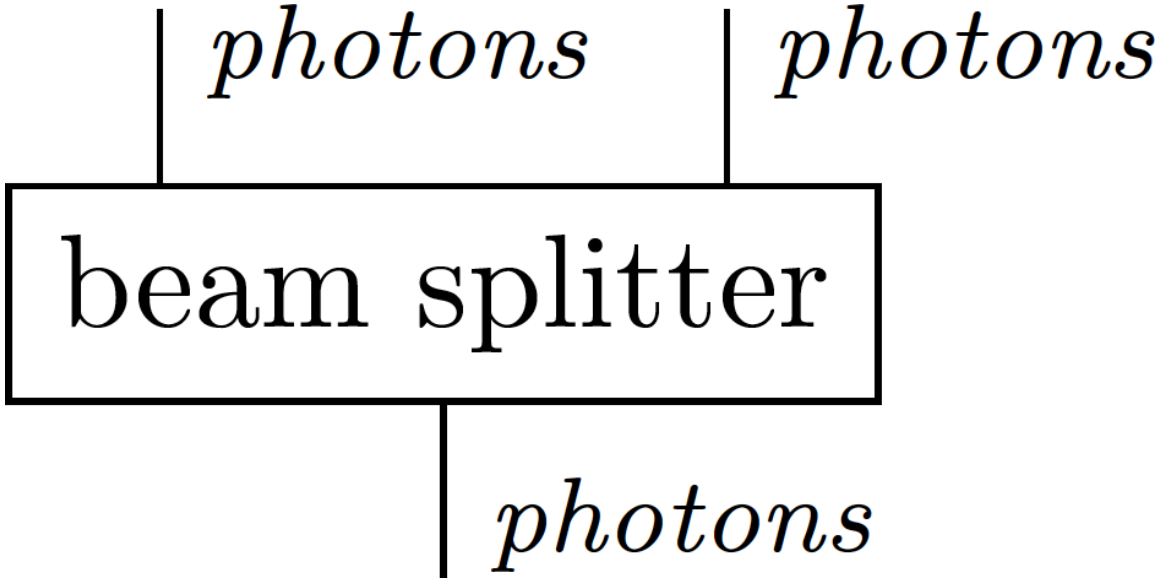
String diagramsは、ループの禁止を取り除いたDiagramである。さらに、入力を入力に、出力を出力につなげるのもゆるされる。



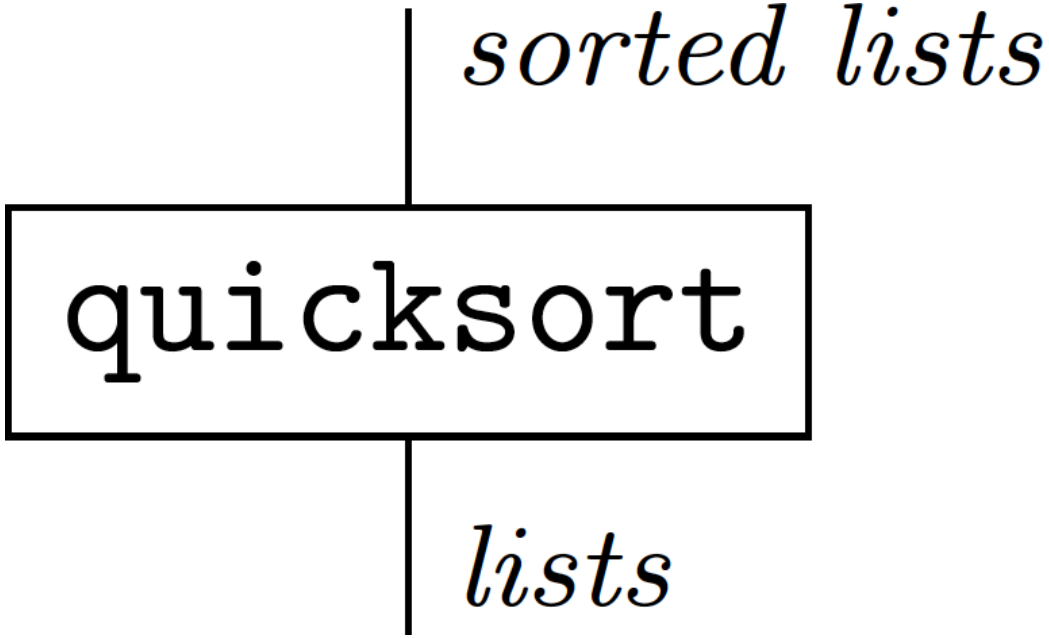
Diagramの例



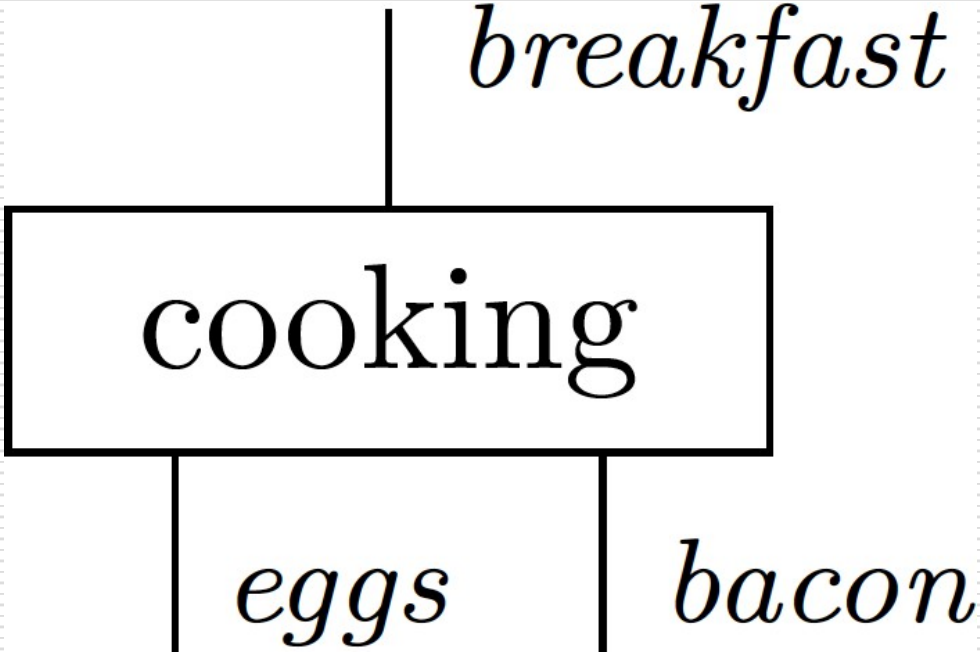
Diagramの例



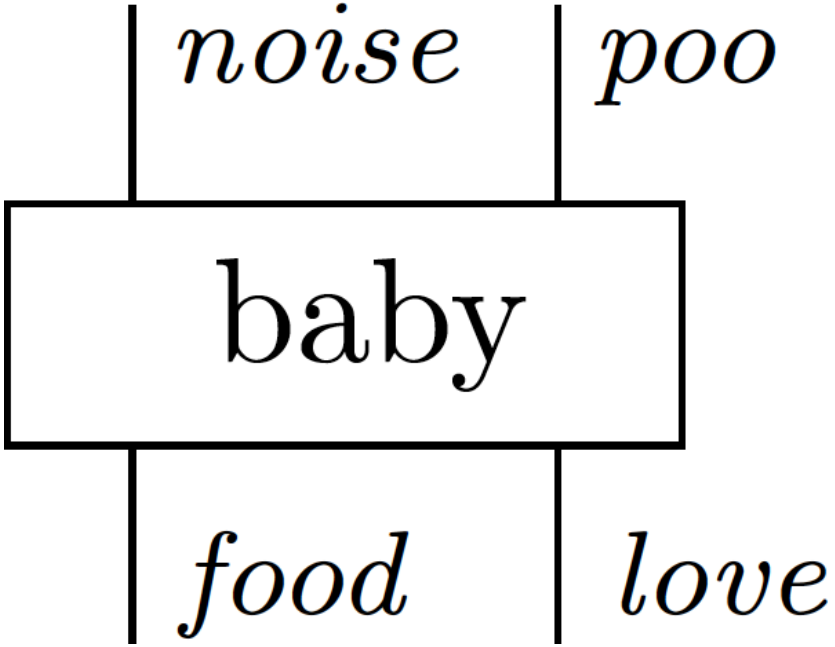
Diagramの例



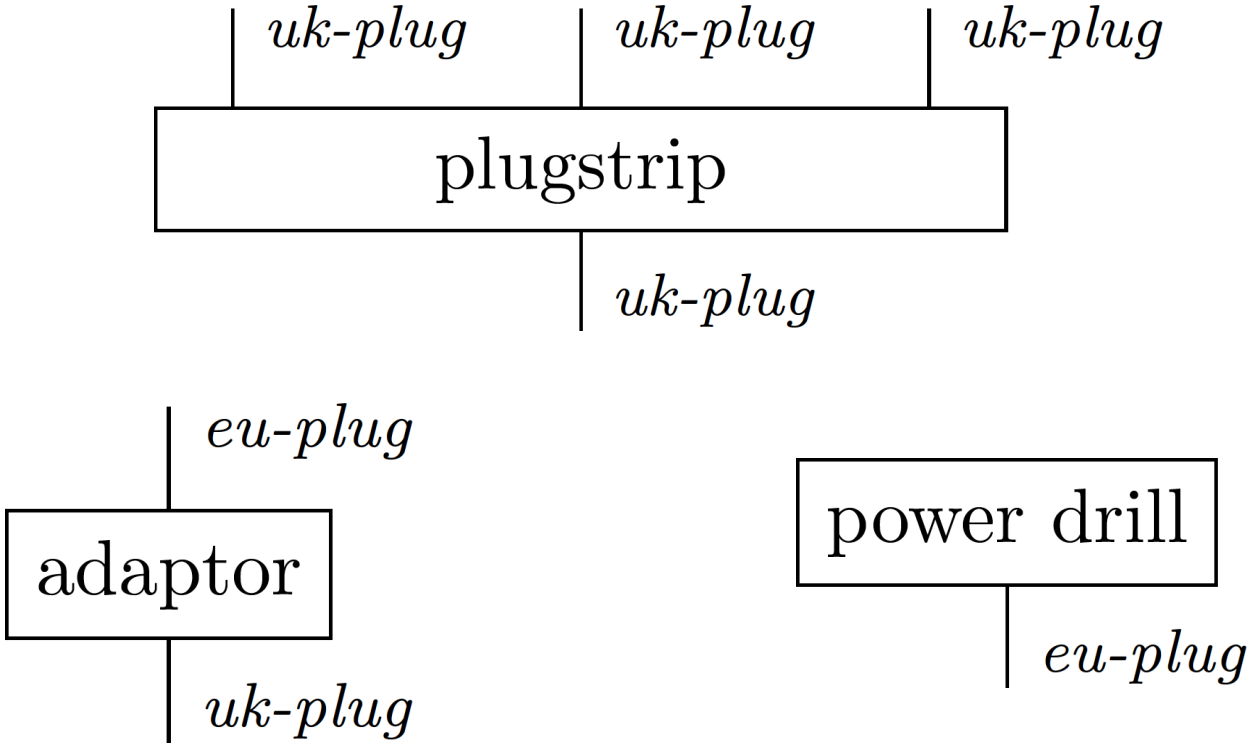
Diagramの例



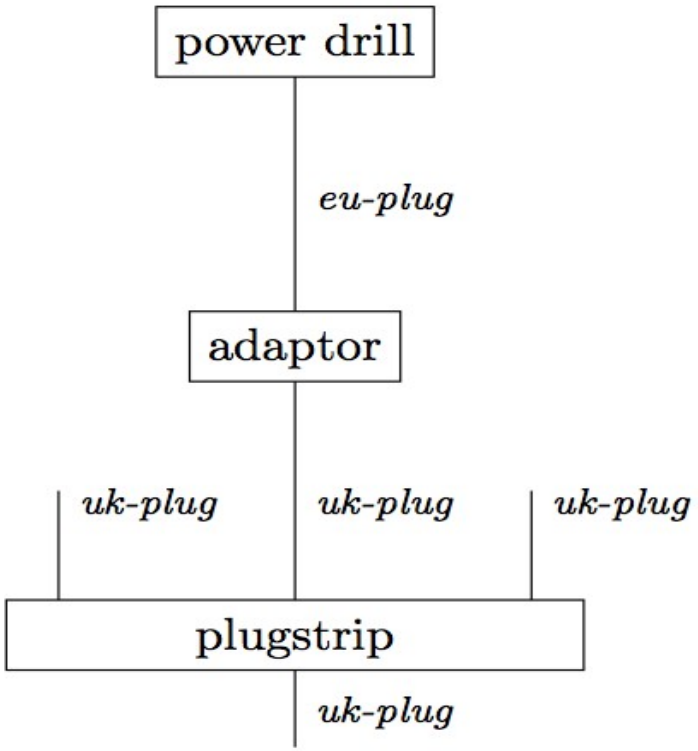
Diagramの例



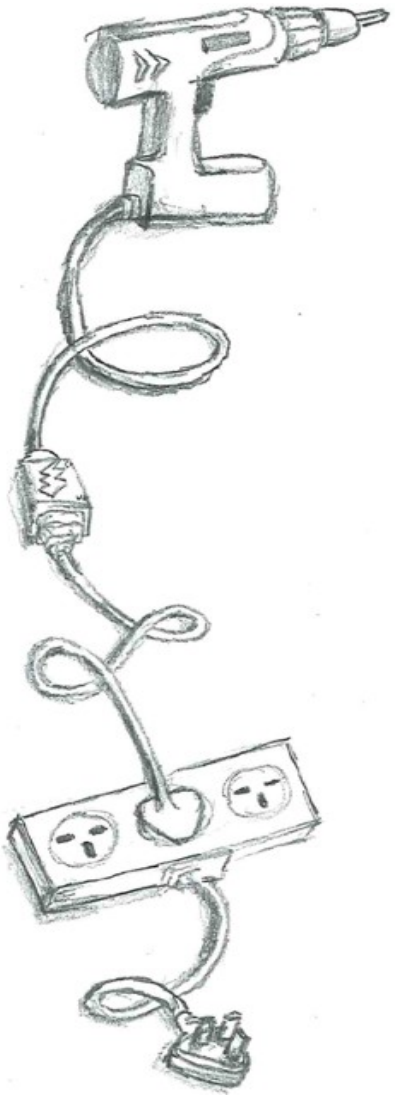
Diagramの例


uk-plug
uk-plug
uk-plug
plugstrip
uk-plug
eu-plug
adaptor
uk-plug
power drill
eu-plug

Diagramの例


power drill
eu-plug
adaptor
uk-plug
uk-plug
uk-plug
plugstrip
uk-plug

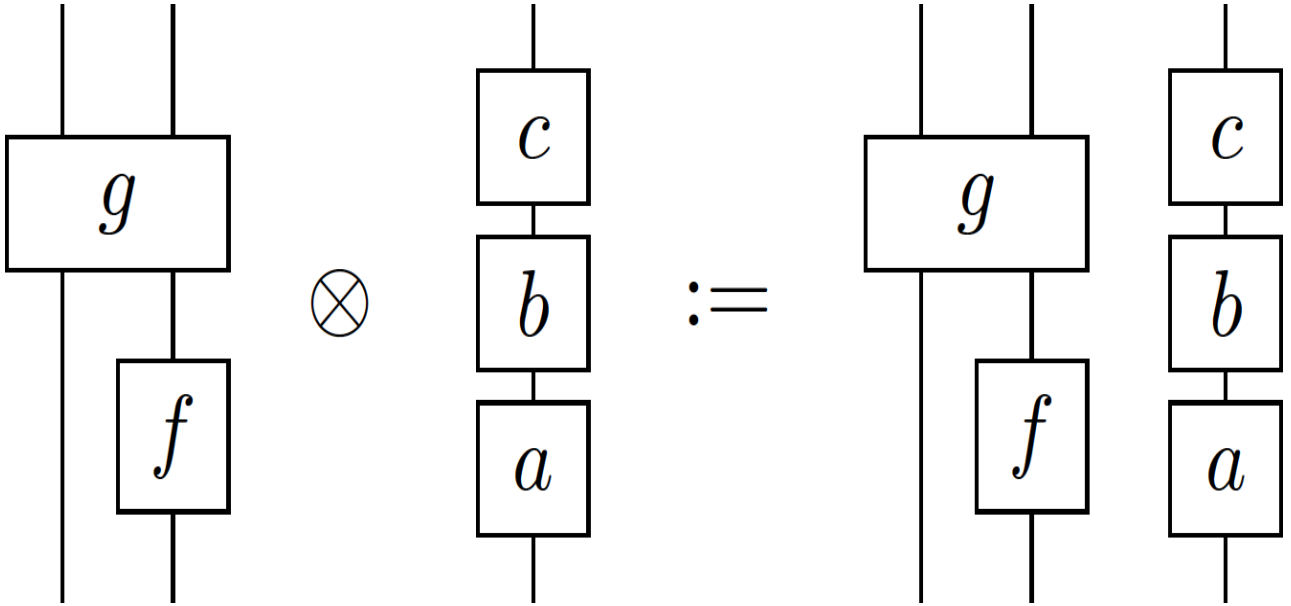
:=



Diagramを構成する

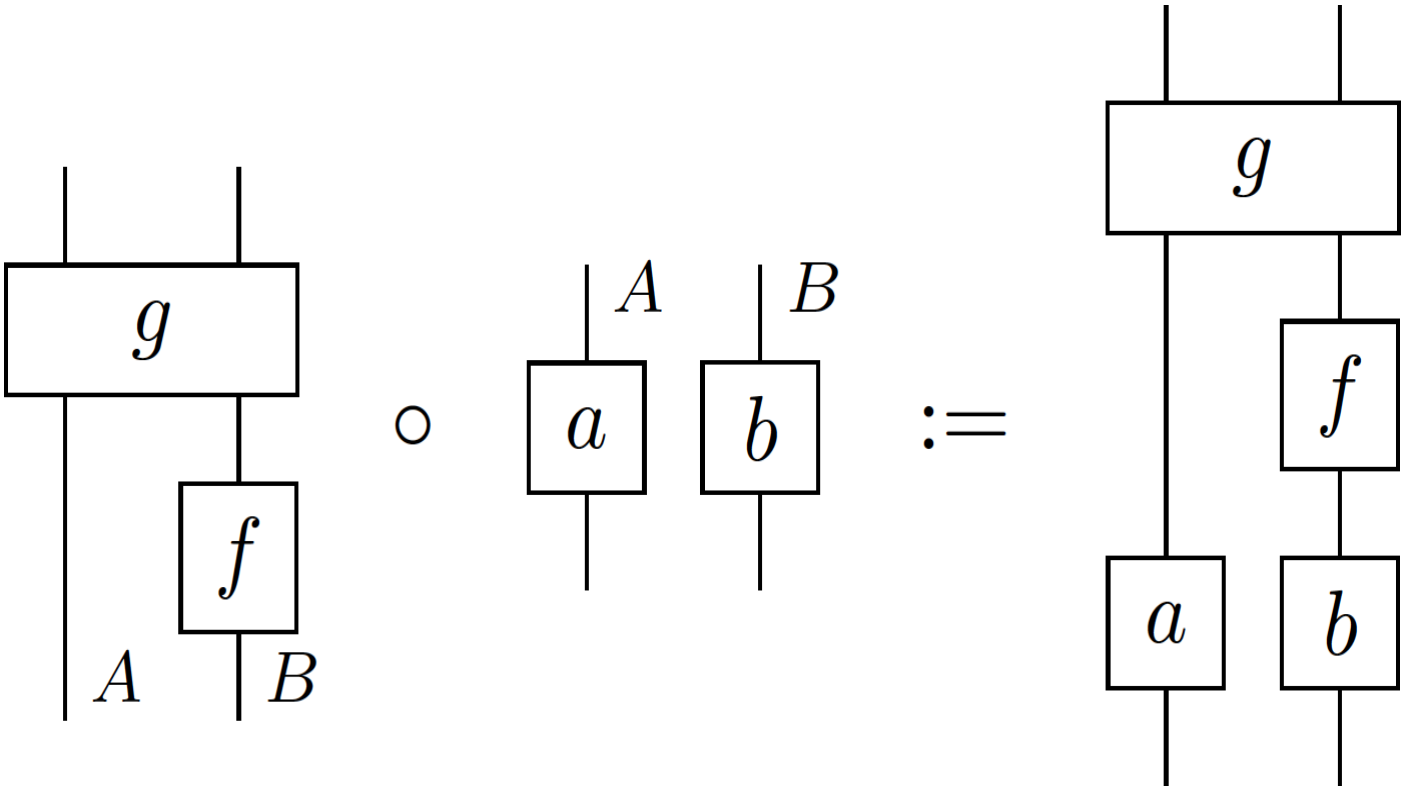
Diagramを構成する二つの操作

“$f \otimes g$” := “f **while** g”



Diagramを構成する二つの操作

“$f \circ g$” := “f **after** g”



Diagramを構成する二つの操作

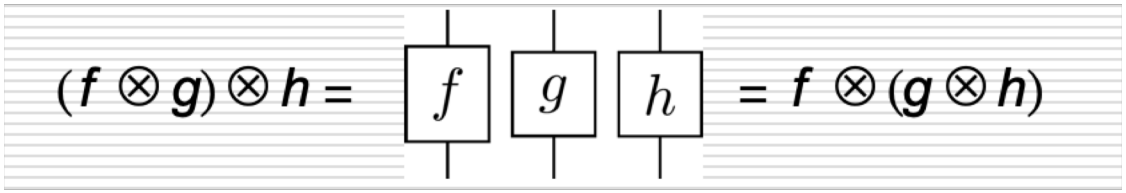
“$f \otimes g$” := “f **while** g”

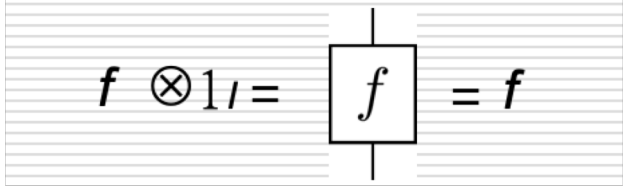
“$f \circ g$” := “f **after** g”

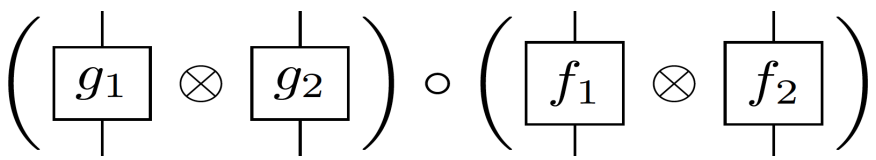
These are:

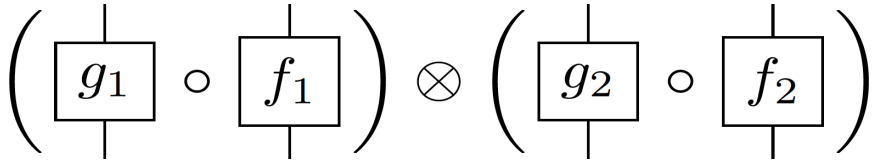
- associative
- have as respective units:
  - ‘empty’-diagram
  - ‘wire’-diagram

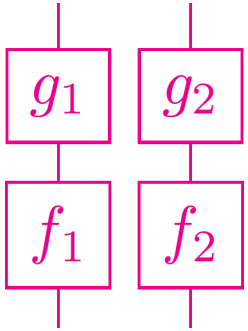
なぜDiagramか？
次のような式が簡単に得られる

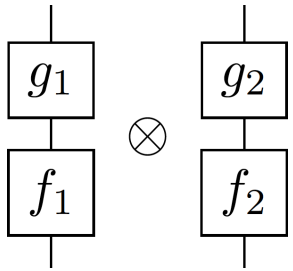


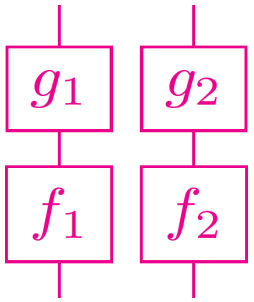








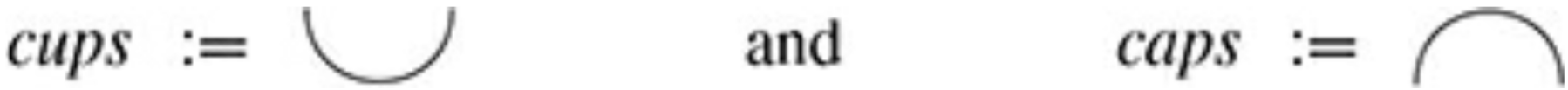




CupとCap

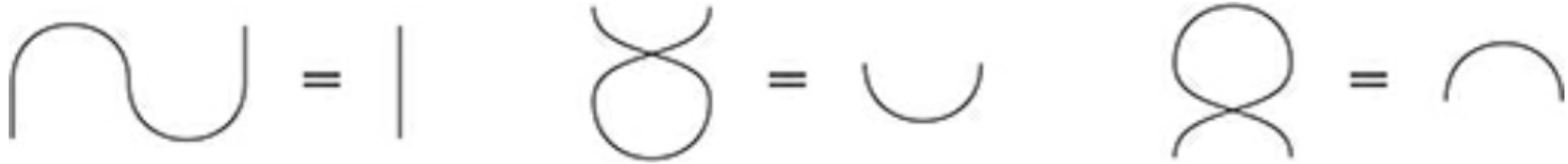
CupとCap

String Diaguramの中に現れる、次の形の図形を、cupとcapと呼ぶ。

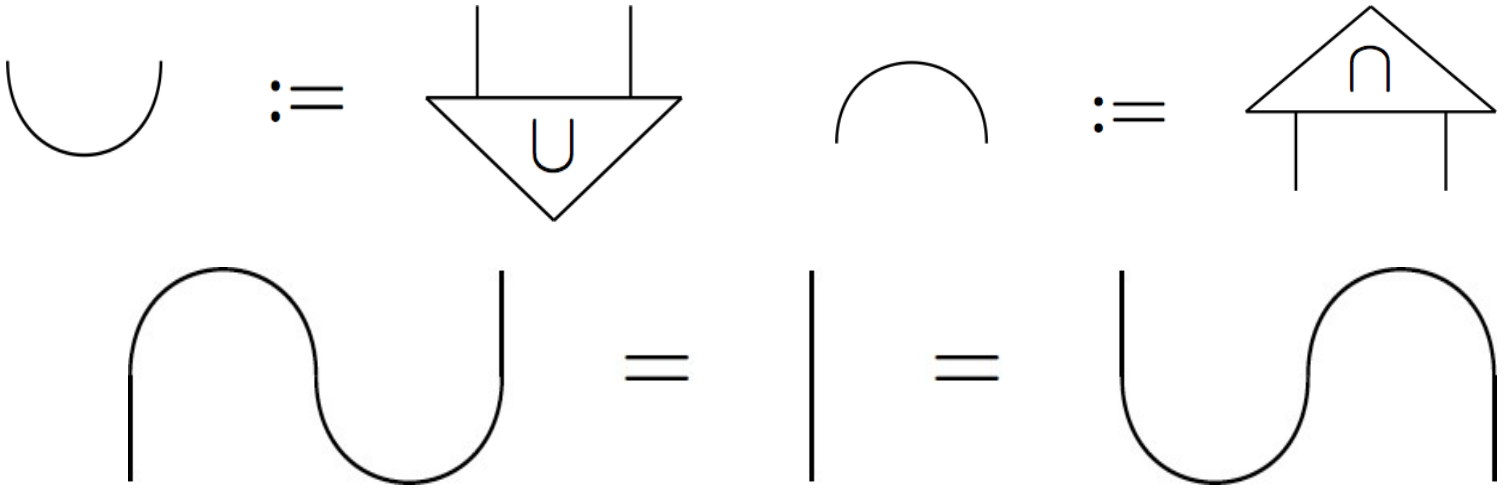


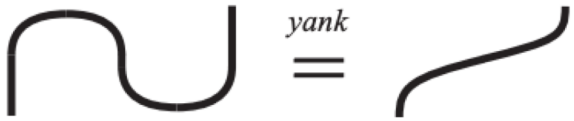
これらについては、次のような変形が可能である。

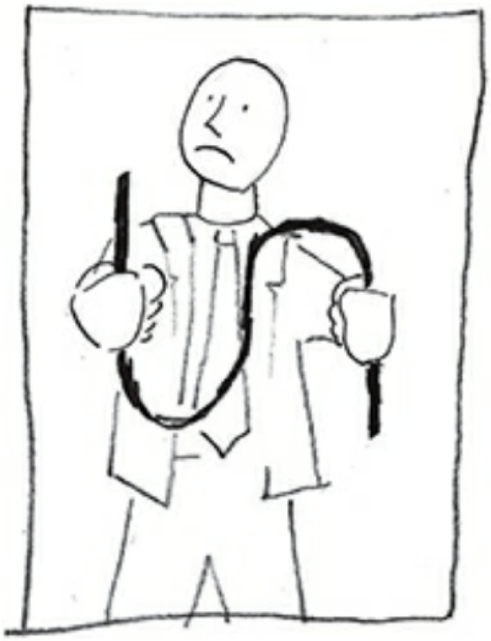
Yanking Equations



CupとCap



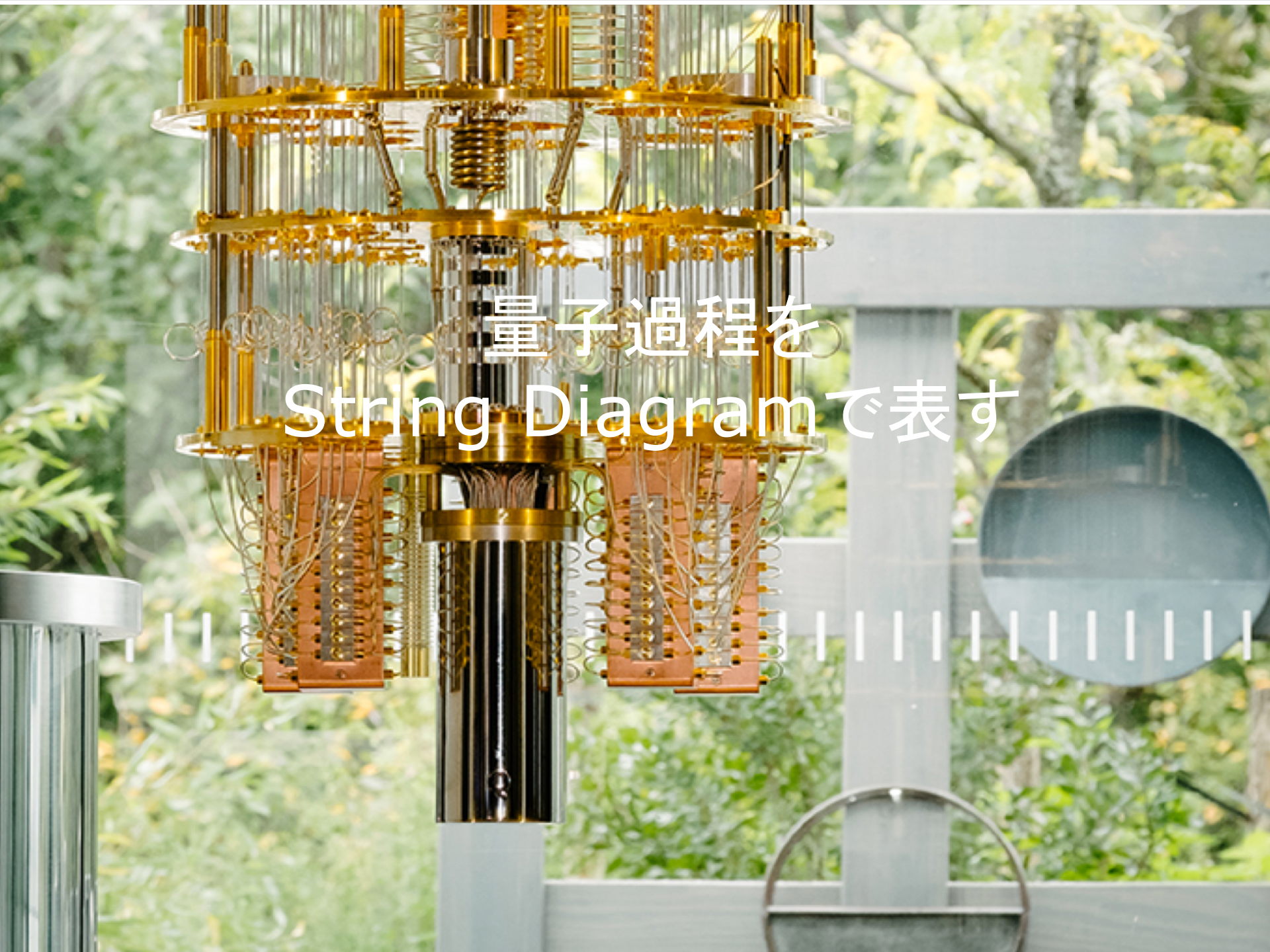
	element 1	element 2	rule
pics:			
cats:	$\mathrm{I} \xrightarrow{\eta_A} A \otimes A$	$A \otimes A \xrightarrow{\epsilon_A} \mathrm{I}$	$(\epsilon_A \otimes 1_A) \circ (1_A \otimes \eta_A) = 1_A$
FHilb:	$\sum_i \lvert ii \rangle$	$\sum_i \langle ii \rvert$	$\left(\sum_i \langle ii \rvert \otimes 1_{\mathcal{H}}\right)\left(1_{\mathcal{H}} \otimes \sum_i \lvert ii \rangle\right) = 1_{\mathcal{H}}$







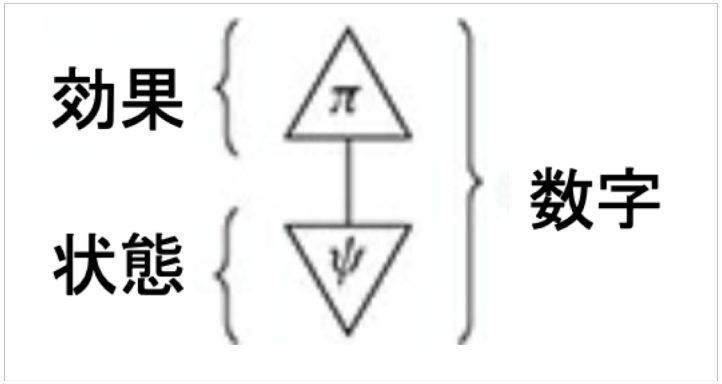



量子過程を
String Diagramで表す

ket記法とDiagram

Diagramを構成するいくつかの要素

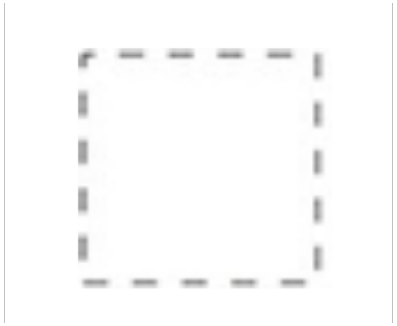
「状態」は、そのままでは観測できない。
観測されて、初めてその「効果」が現れる。
「状態」と結びついた「効果」は、一つの
数字を生み出す。それは、ある「状態」が
ある「効果」として観測される確率と考え
ていい。



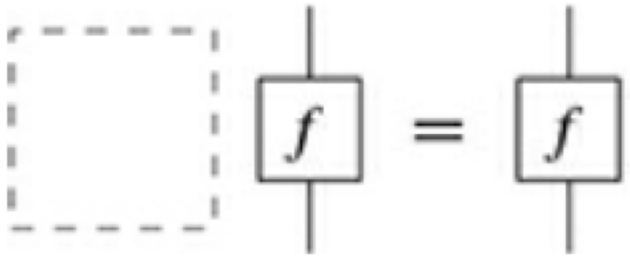
「数字」は、入力も出力もないプロセスである。
それを単純に λと表す。

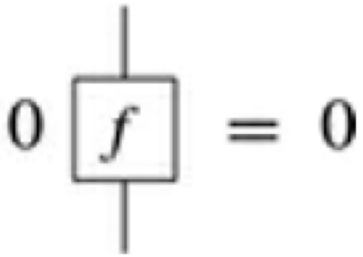


特別な数字がある。それは、空なダイアグラム
を表している。それを 1 と呼ぶ。

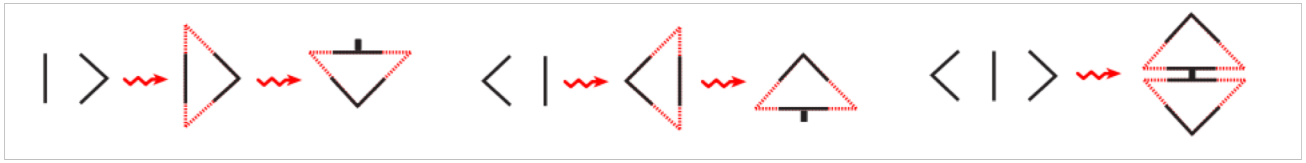


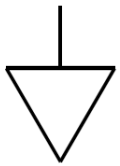
空なDiagram 数字 1と、数字 0



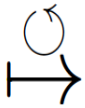


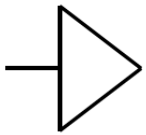
DiagramのState/Effect図式とket記法





state記号



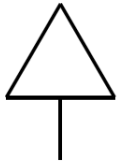


90度回転



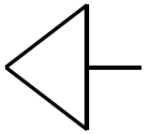


ket



effect記号



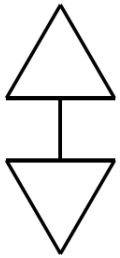


90度回転

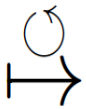


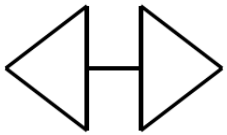


bra



effect/state記号





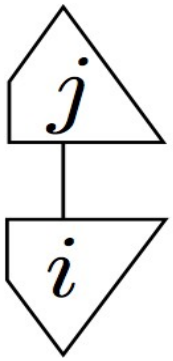
90度回転





bra ket

正規直交性

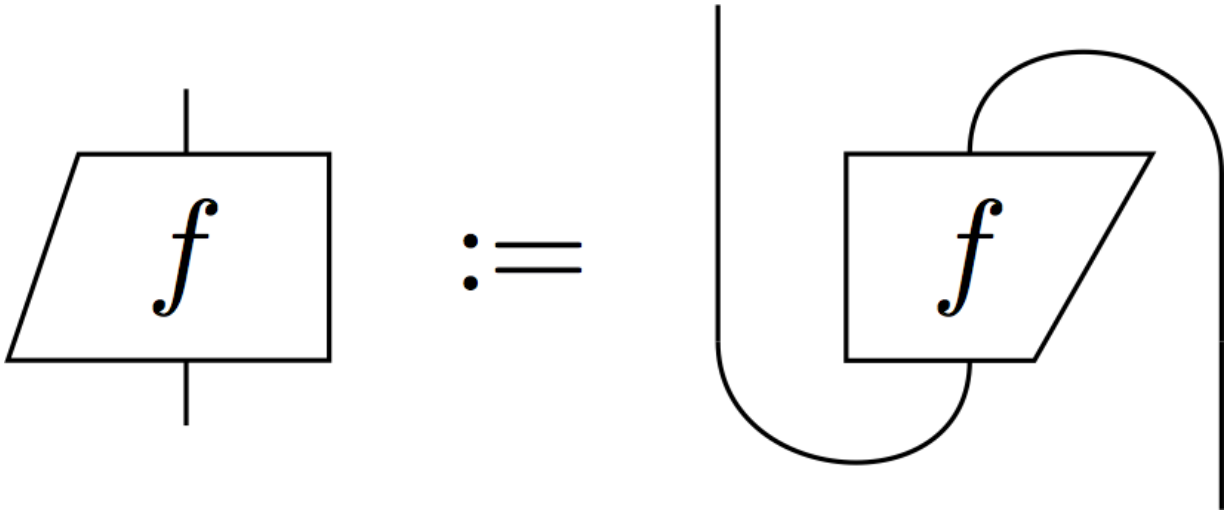


$= \delta_{ij}$ $\qquad$ $<j|i> = \delta_{ij}$

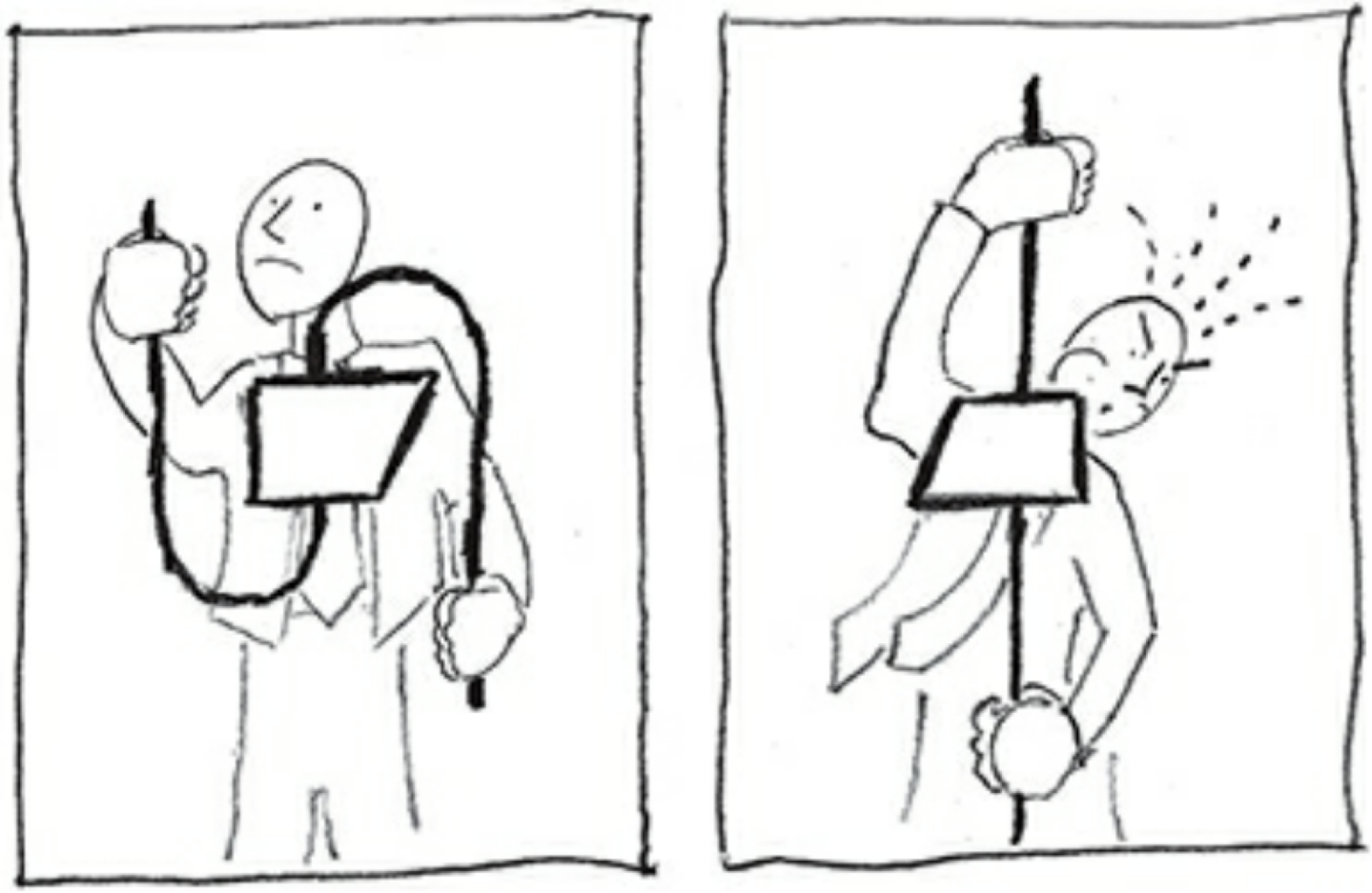
pics:				
cats:	object A	morphism $A \xrightarrow{f} B$	I	$\mathrm{I} \xrightarrow{\psi} B$
Hilb:	Hilbert space $\mathcal{H}$	linear map $f : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$	$\mathbb{C}$	$\lvert\psi\rangle \in \mathcal{H}$

プロセスの変換とDiagram

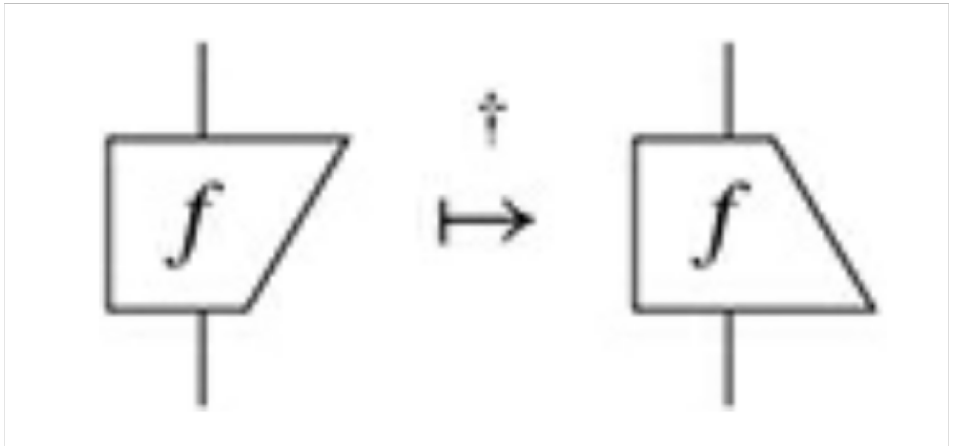
プロセスの新しい便利な表記法



プロセス f のトランスポーズ



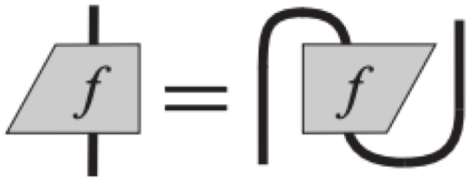
随伴プロセス



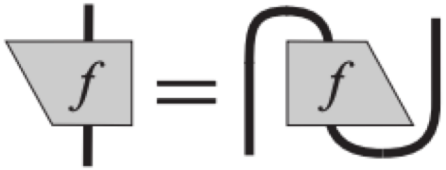
プロセス f の随伴プロセス

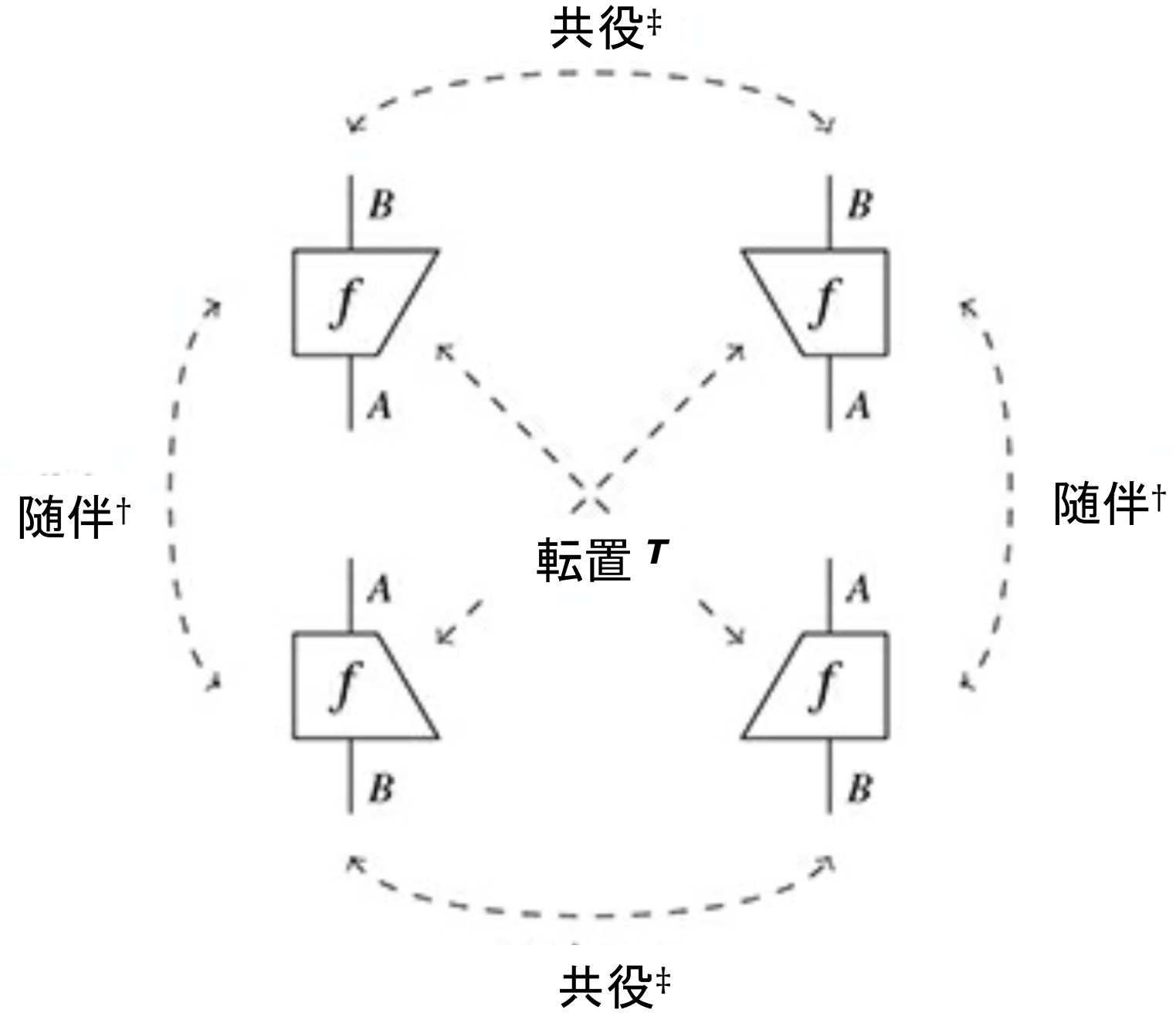
pics:		
cats:	$A \xrightarrow{f} B$	$B \xrightarrow{f^\dagger} A$
Hilb:	linear map	its adjoint

プロセス f の転置プロセス

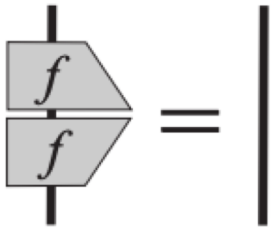
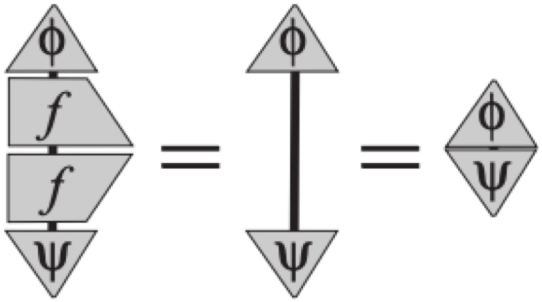
pics:		
cats:	$A \xrightarrow{f} B$	$f^T = B \xrightarrow{(\epsilon_B \otimes 1_A) \circ (1_B \otimes f \otimes 1_A) \circ (1_B \otimes \eta_A)} A$
FHilb:	linear map	its transpose

プロセス f の共役プロセス

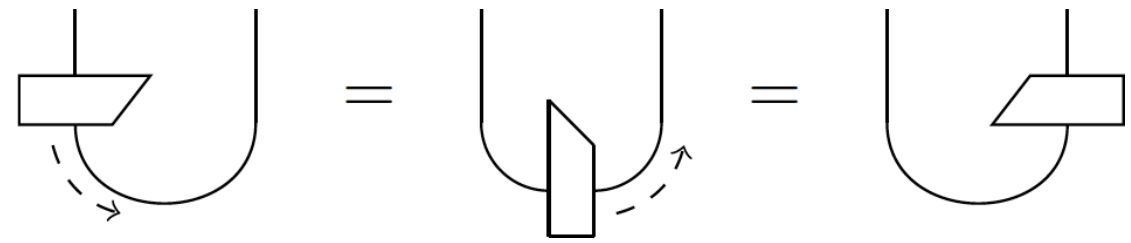
pics:		
cats:	$A \xrightarrow{f} B$	$f^\sharp = A \xrightarrow{(\epsilon_A \otimes 1_B) \circ (1_A \otimes f^\dagger \otimes 1_B) \circ (1_A \otimes \eta_B)} B$
FHilb:	linear map	its conjugate

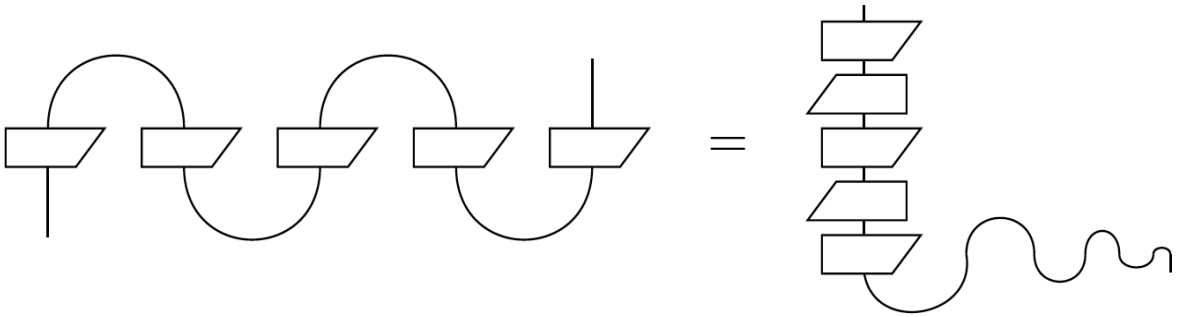

共役‡
B
f
A
B
f
A
随伴†
転置 T
随伴†
A
f
B
A
f
B
共役‡

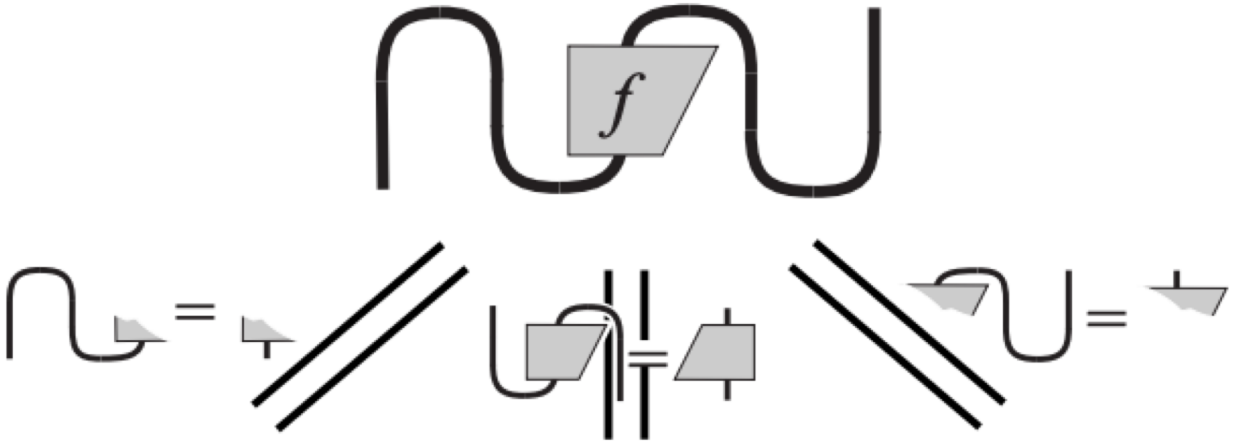
Isometries(等長変換)
= ユニタリ変換

pics:		
cats:	$f^\dagger \circ f = 1_B$	$(f \circ \phi)^\dagger \circ (f \circ \psi) = \phi^\dagger \circ (f^\dagger \circ f) \circ \psi = \phi^\dagger \circ \psi$
FHilb:	f is an isometry	$\langle f(\phi) \vert f(\psi) \rangle = \langle \phi \vert (f^\dagger \circ f)(\psi) \rangle = \langle \phi \vert \psi \rangle$

ユニタリ変換は、内積を
保存する





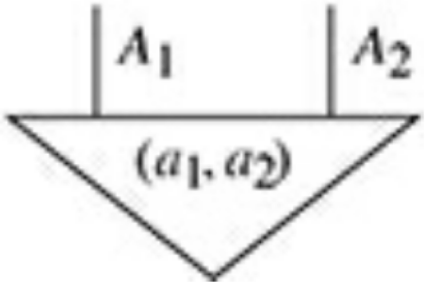

f
f
f
f

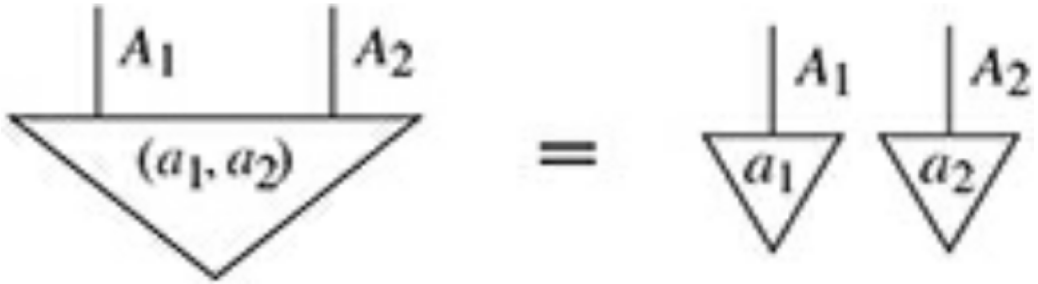
量子過程の特徴

Separability

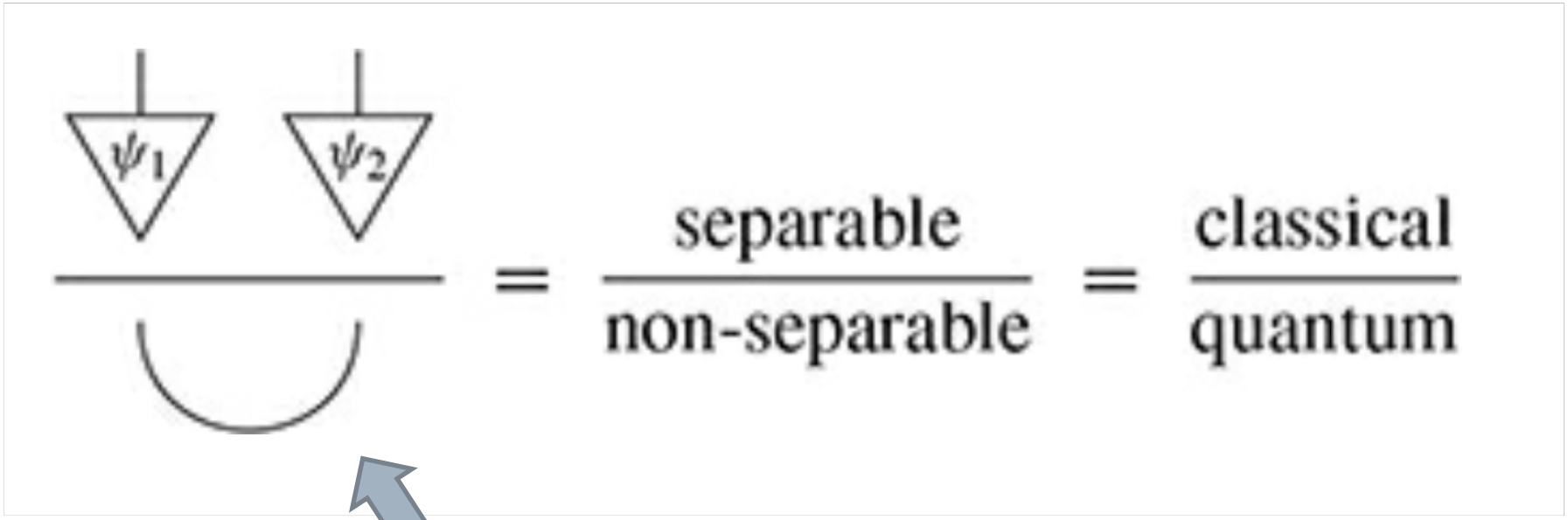


$\psi = \psi_1 \otimes \psi_2$と表せるということ



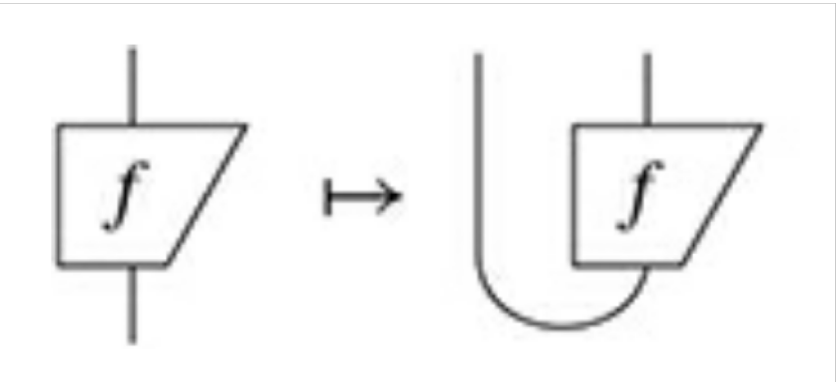


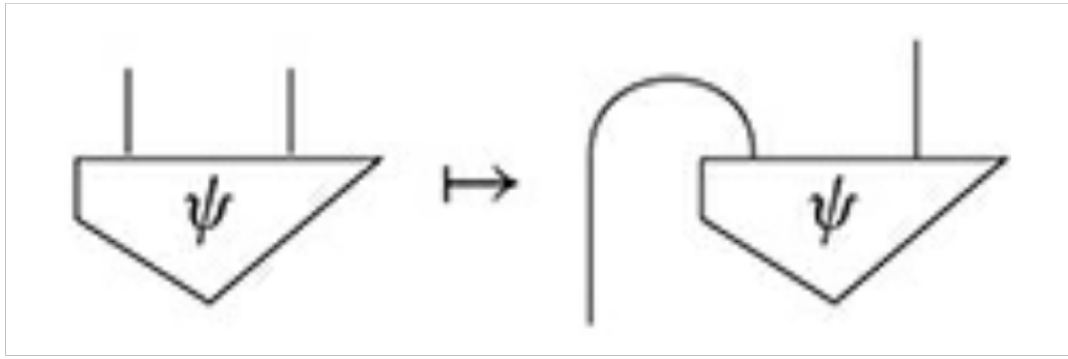
古典論と量子論の違い

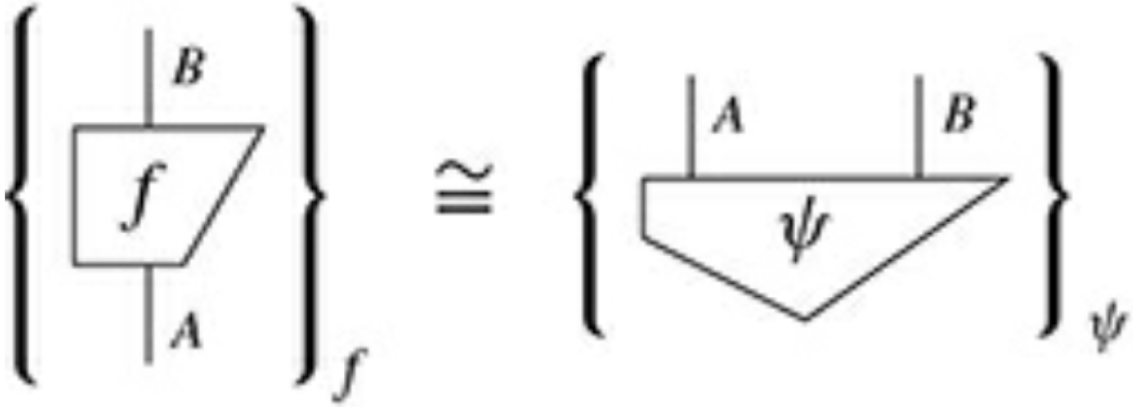


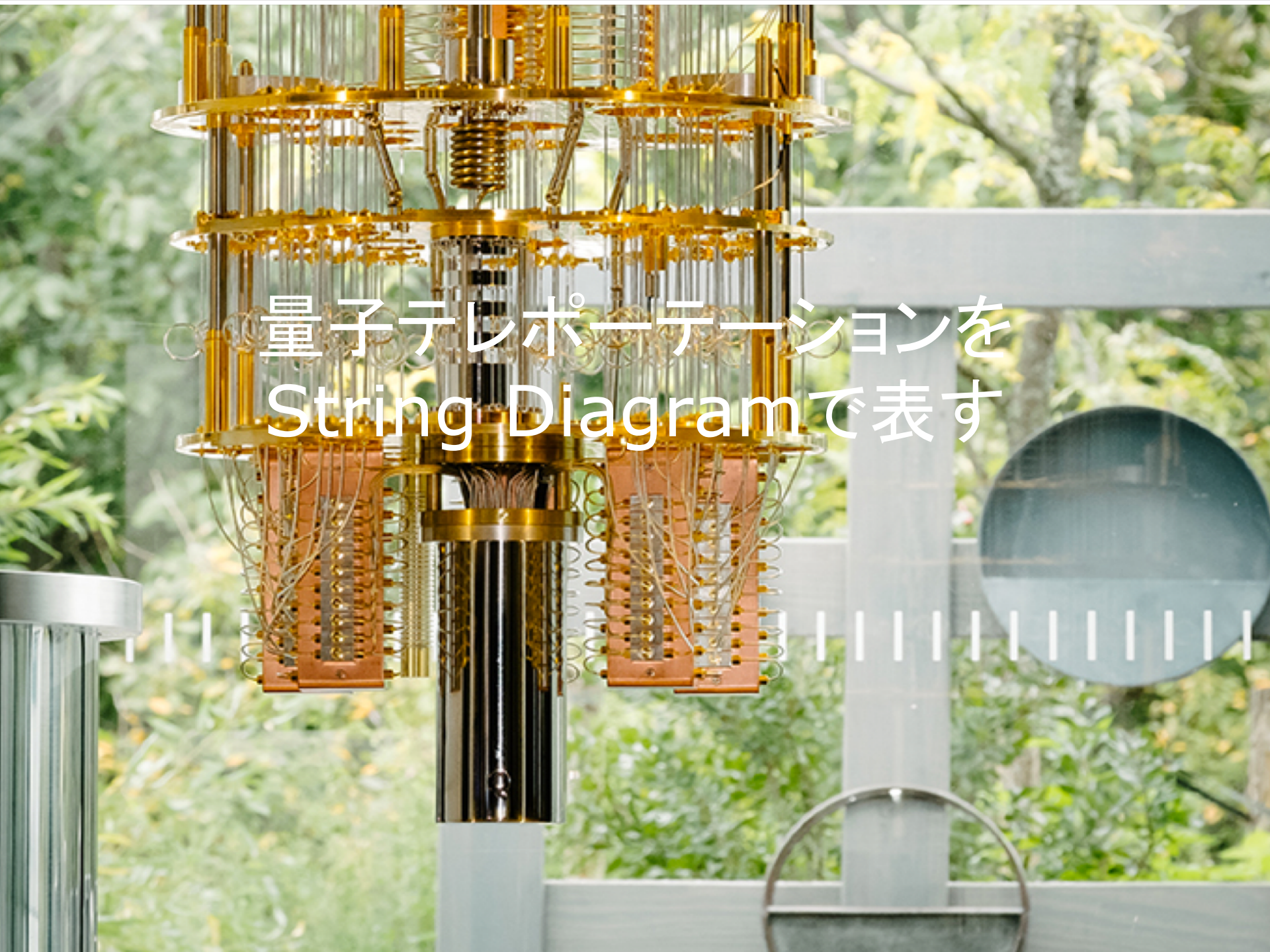
non-separable すなわち、entangle した状態は、cupで表される

For any (non-trivial) system, the cup/cap is never ⊗-separable.








量子テレポーテーションを
String Diagramで表す

なぜ、「量子テレポーテーション」
の発見に60年もかかったのか？

なぜ、「量子テレポーテーション」の発見に60年もかかったのか？

- A first explanation is that within the tradition of physics research during those 60 years, the question of whether something like quantum teleportation would be possible was simply never asked. It only became apparent when researchers stepped outside the existing scientific tradition and asked a seemingly bizarre question:

量子論の情報処理の特徴は何か？

- However, one could go a step further and ask why it was even necessary to first pose such a question for teleportation to be discovered. Why wasn’t it plainly obvious that quantum theory allowed for quantum teleportation, in the same way that it is plainly obvious that hammers are capable of hitting nails? Our answer to this question is that the traditional language of Hilbert spaces just isn’t very good at exposing many of the features of quantum theory, and in particular, those features such as teleportation that involve the interaction of multiple systems across time and space. Thus, we pose a new question:

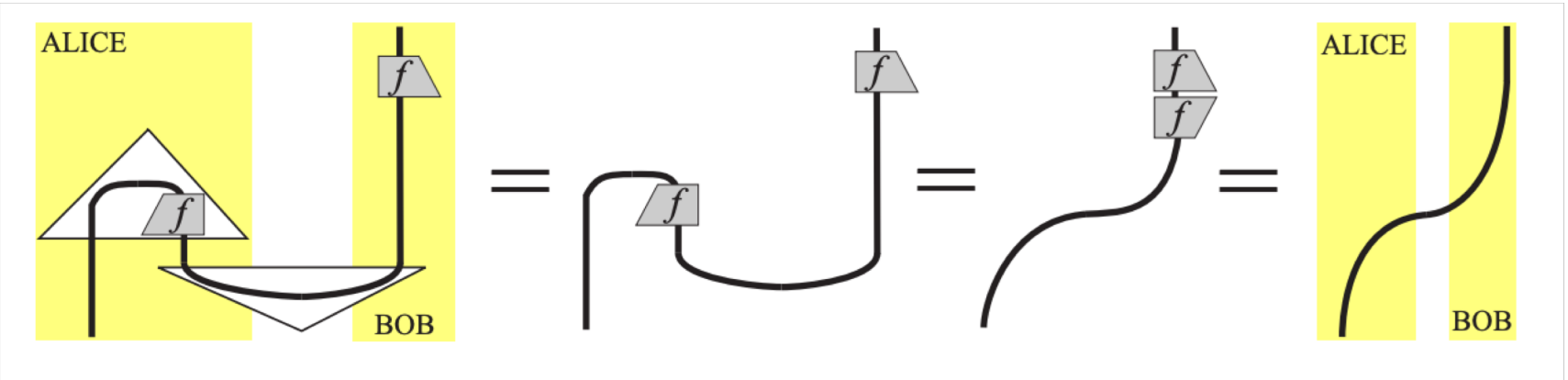
量子論での推論に最も適した言語は何か？

- The answer to this question is what this book is all about. The reader will learn about many important new quantum features that rose to prominence within the emerging fields of quantum computation, quantum information, and quantum technologies, and how these developments went hand-in-hand with a revival of research into the foundations of quantum theory. All of this will be done by using a novel presentation of quantum theory in a purely diagrammatic manner.

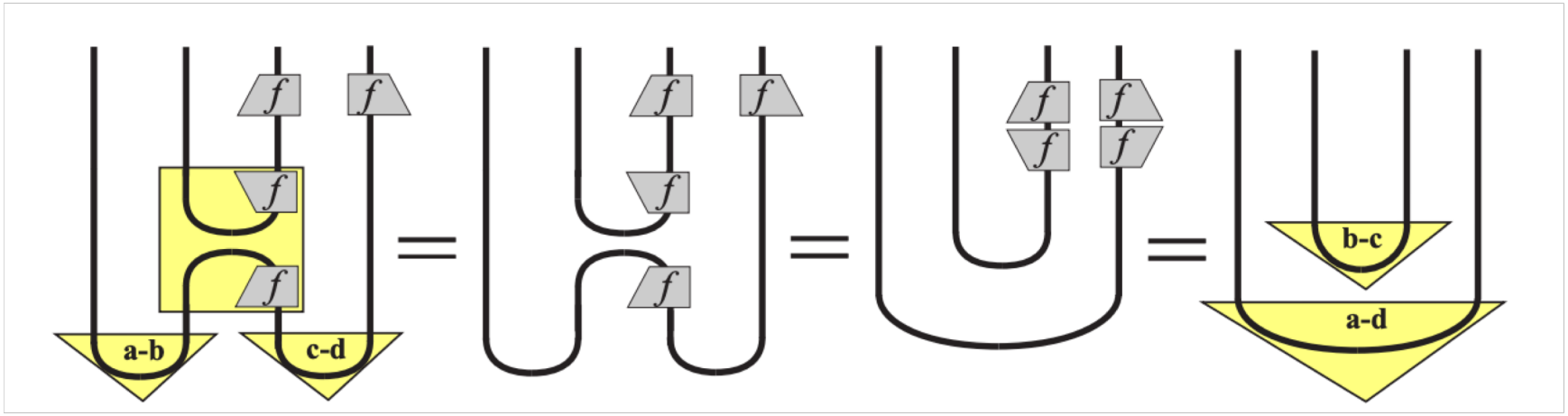
量子過程を記述する図形による二次元の表記法「プロセスの構成」を最も重要視すること

- This not only consists of developing a two-dimensional notation for describing and reasoning about quantum processes, but also of a unique methodology that treats quantum processes, and most importantly compositions of processes, as first-class citizens.

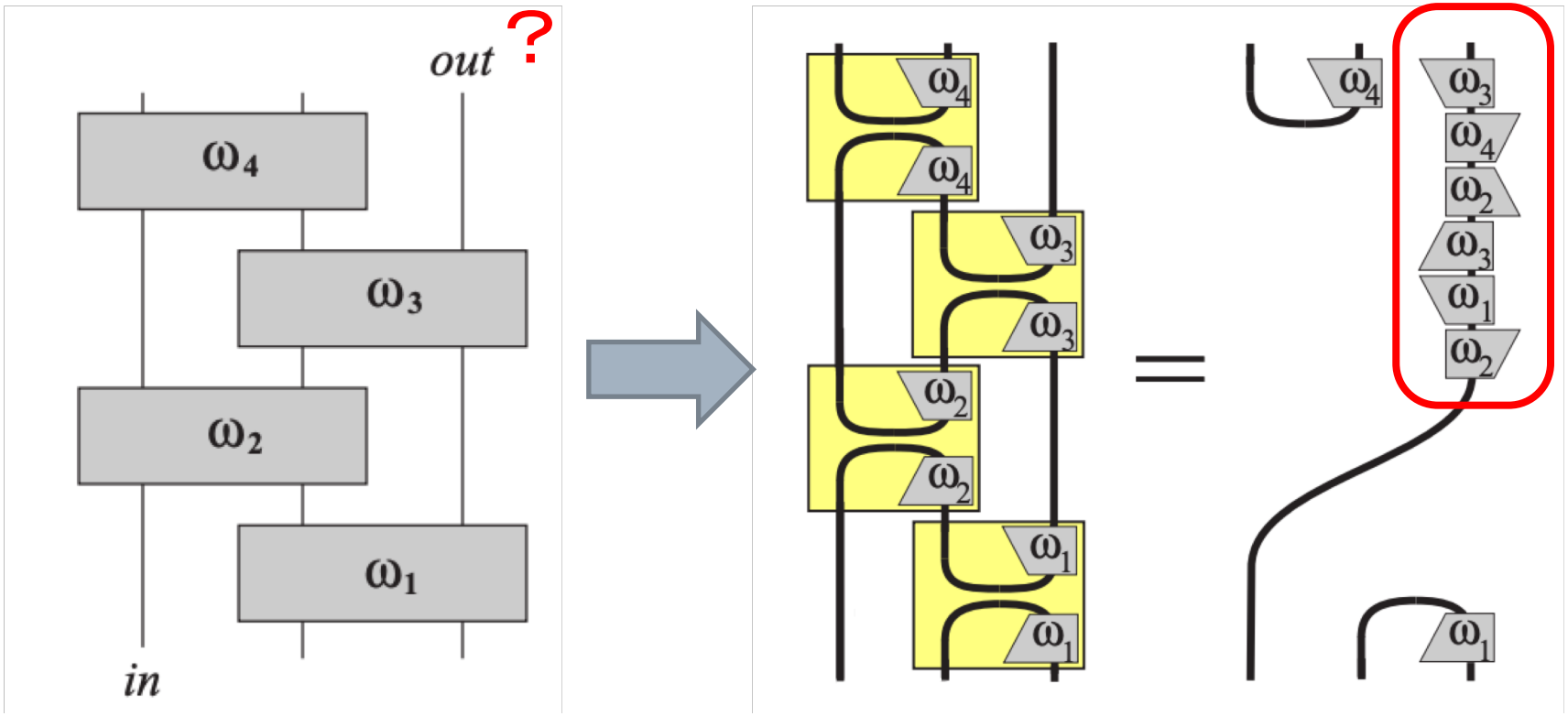
Quantum Teleportation



Entanglement Swapping

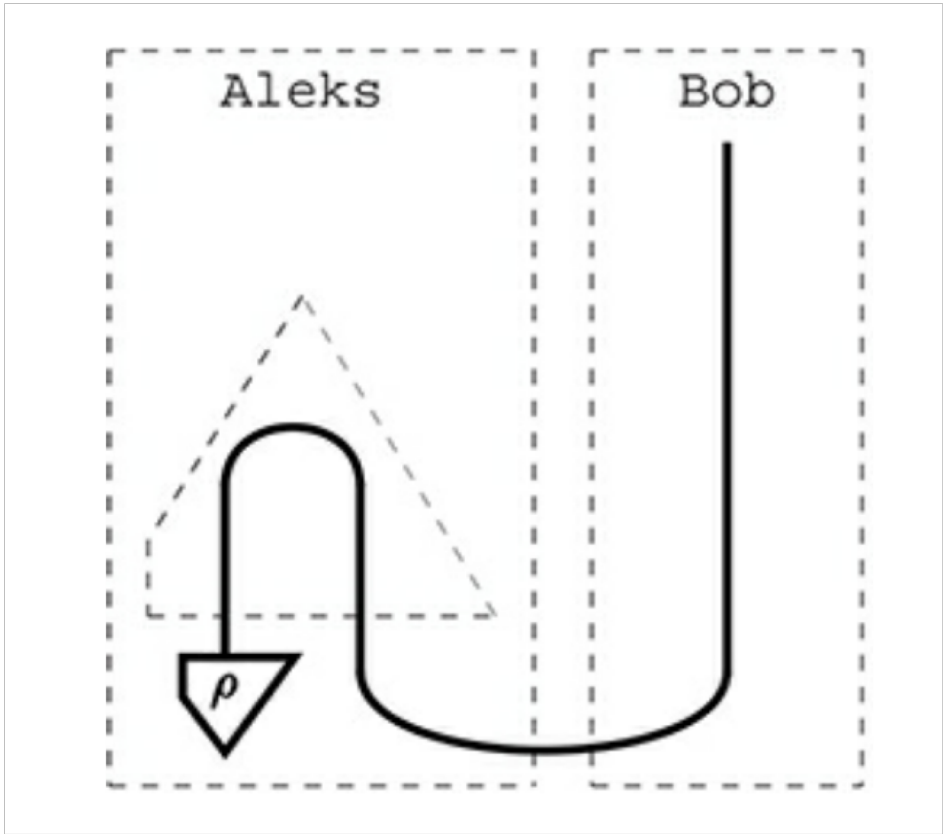


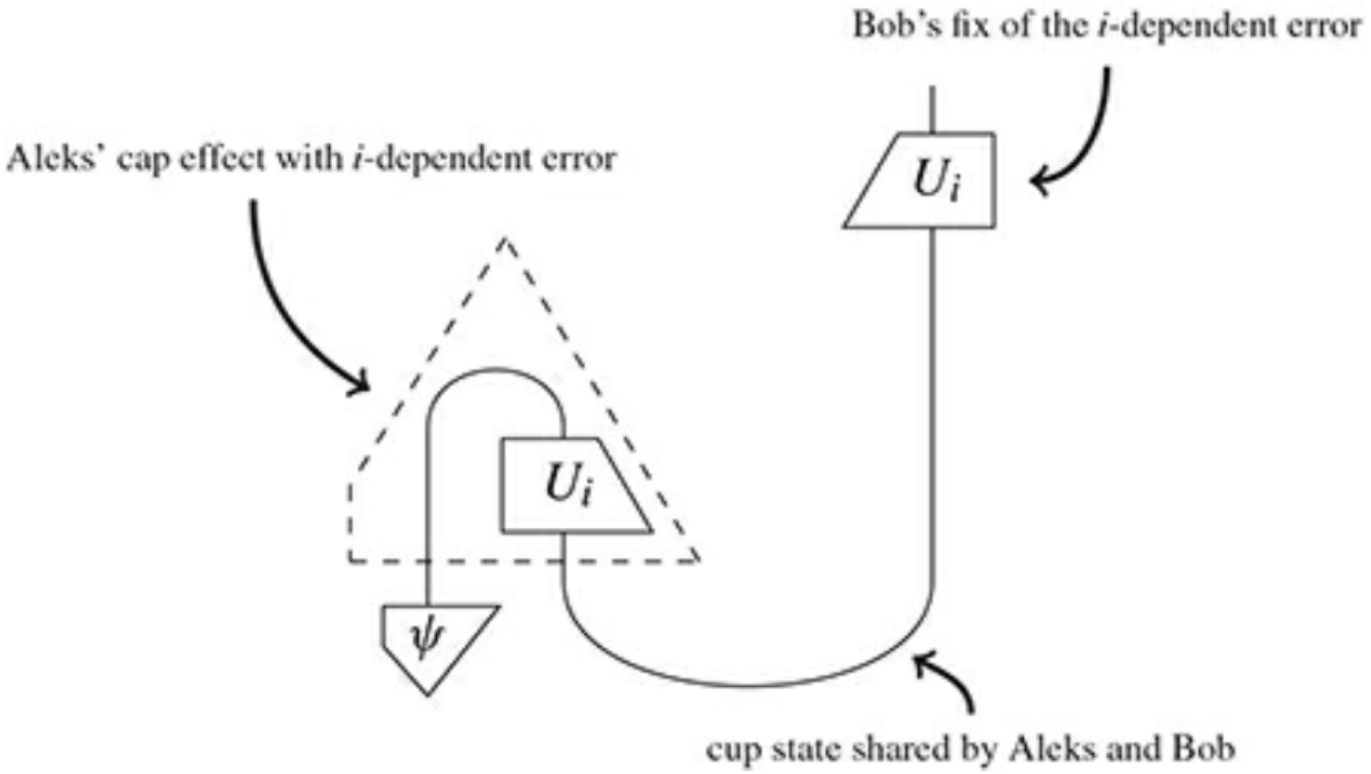
この回路の出力を求めよ

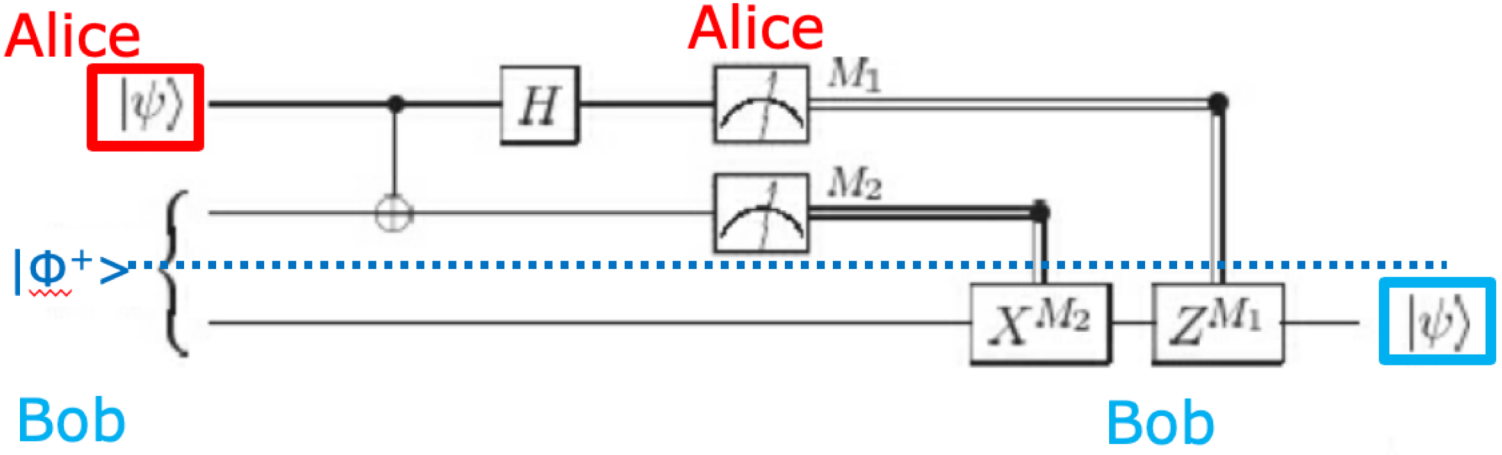


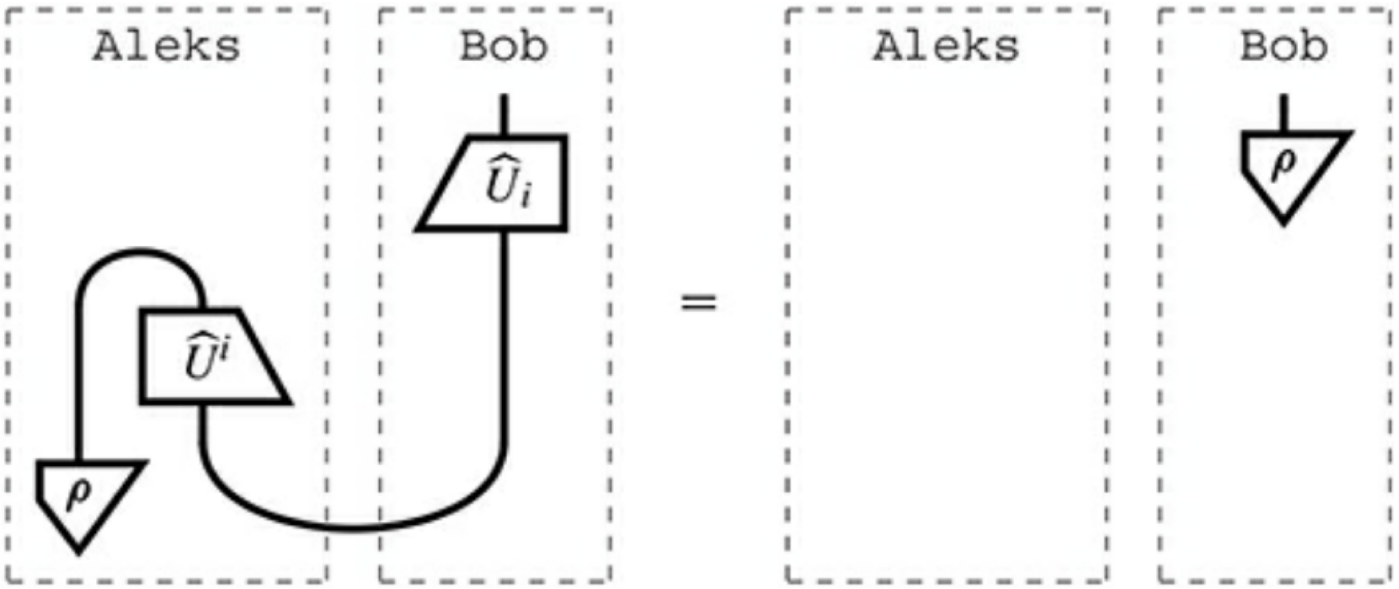
量子テレポーテーション

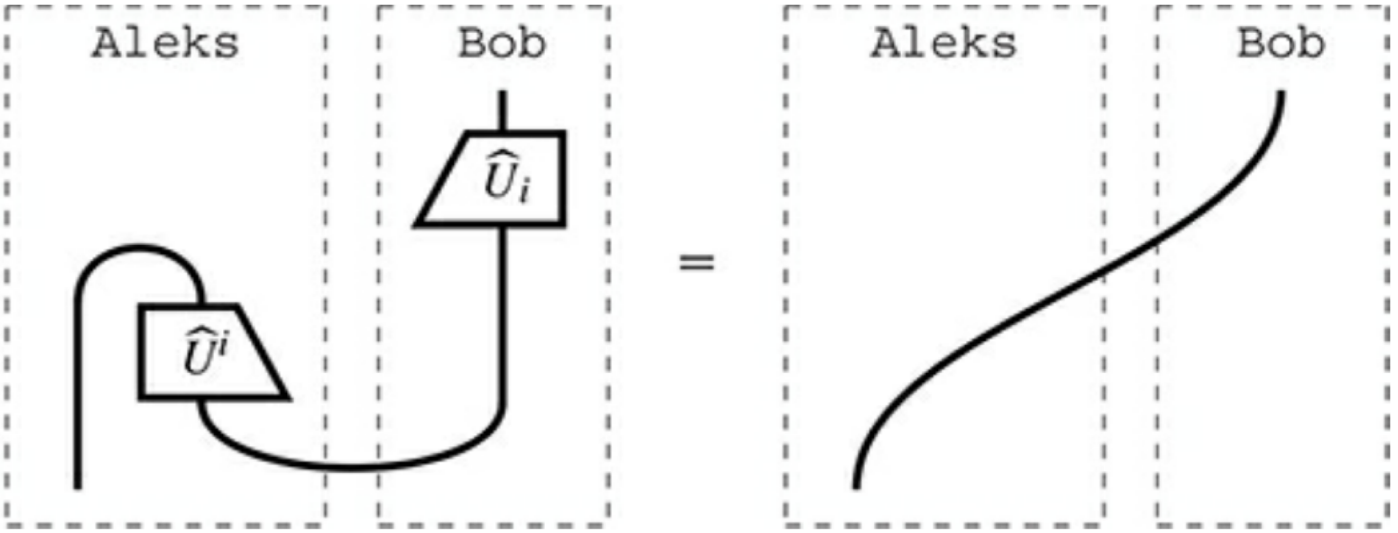
最初の設定




Bob's fix of the *i*-dependent error
Aleks' cap effect with *i*-dependent error
U_i
U_i
ψ
cup state shared by Aleks and Bob

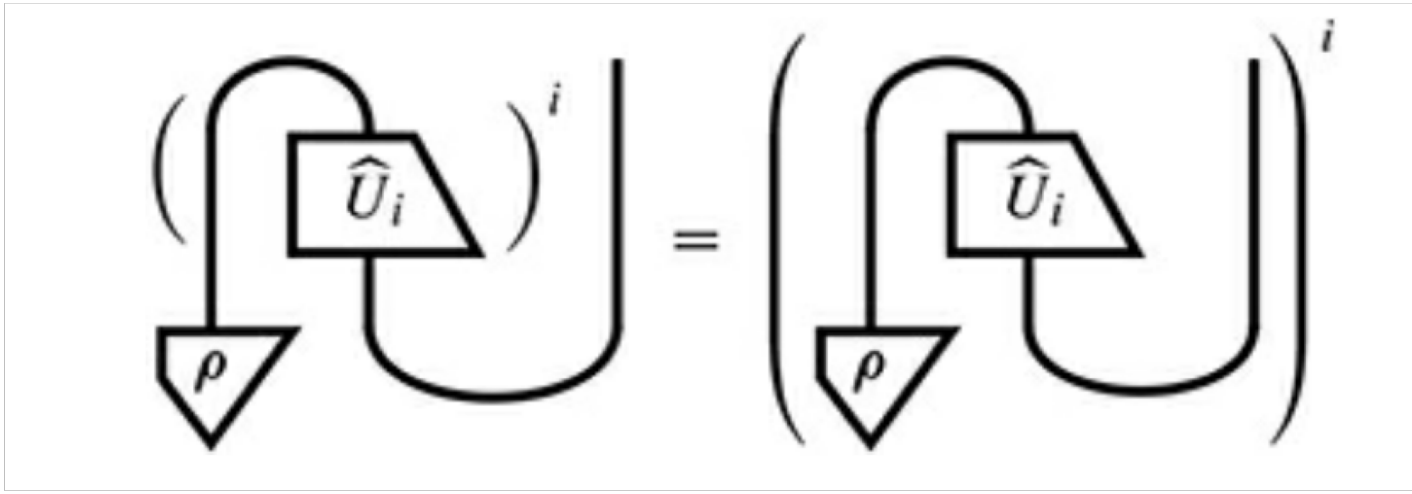

Alice
Alice
$|\psi\rangle$
H
M_1
M_2
$|\Phi^+\rangle$
X^{M_2}
Z^{M_1}
$|\psi\rangle$
Bob
Bob


Aleks
Bob
$\hat{U}_i$
$\hat{U}^i$
ρ
=
Aleks
Bob
ρ


Aleks
Bob
$\hat{U}_i$
$\hat{U}^i$
=
Aleks
Bob

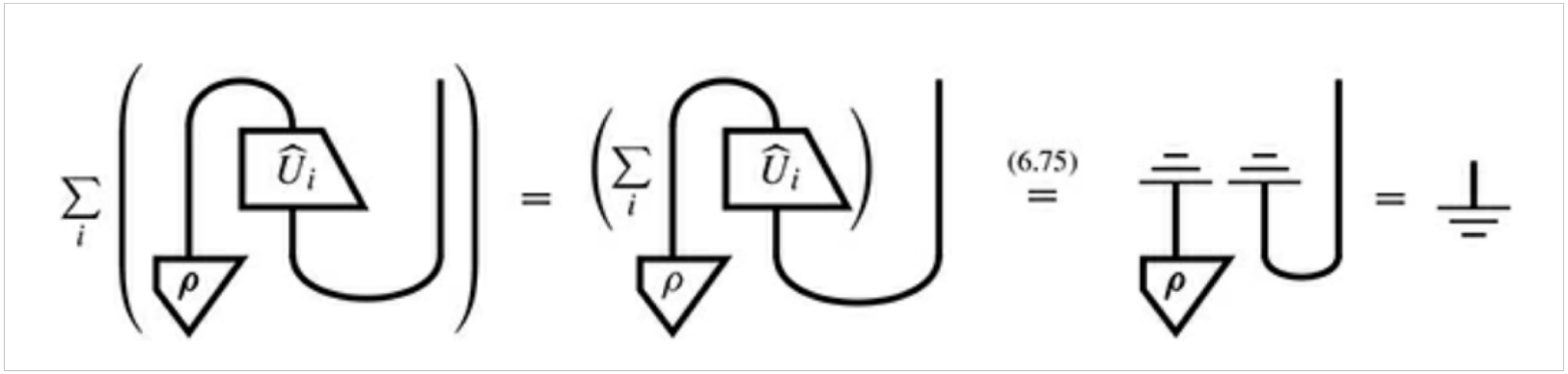
Aleksが通信しないとどうなるか？
エラー訂正なしのテレポーテーション

- In other words, what happens if Aleks decides not to communicate the value i to Bob? Consider a version of teleportation without a correction:

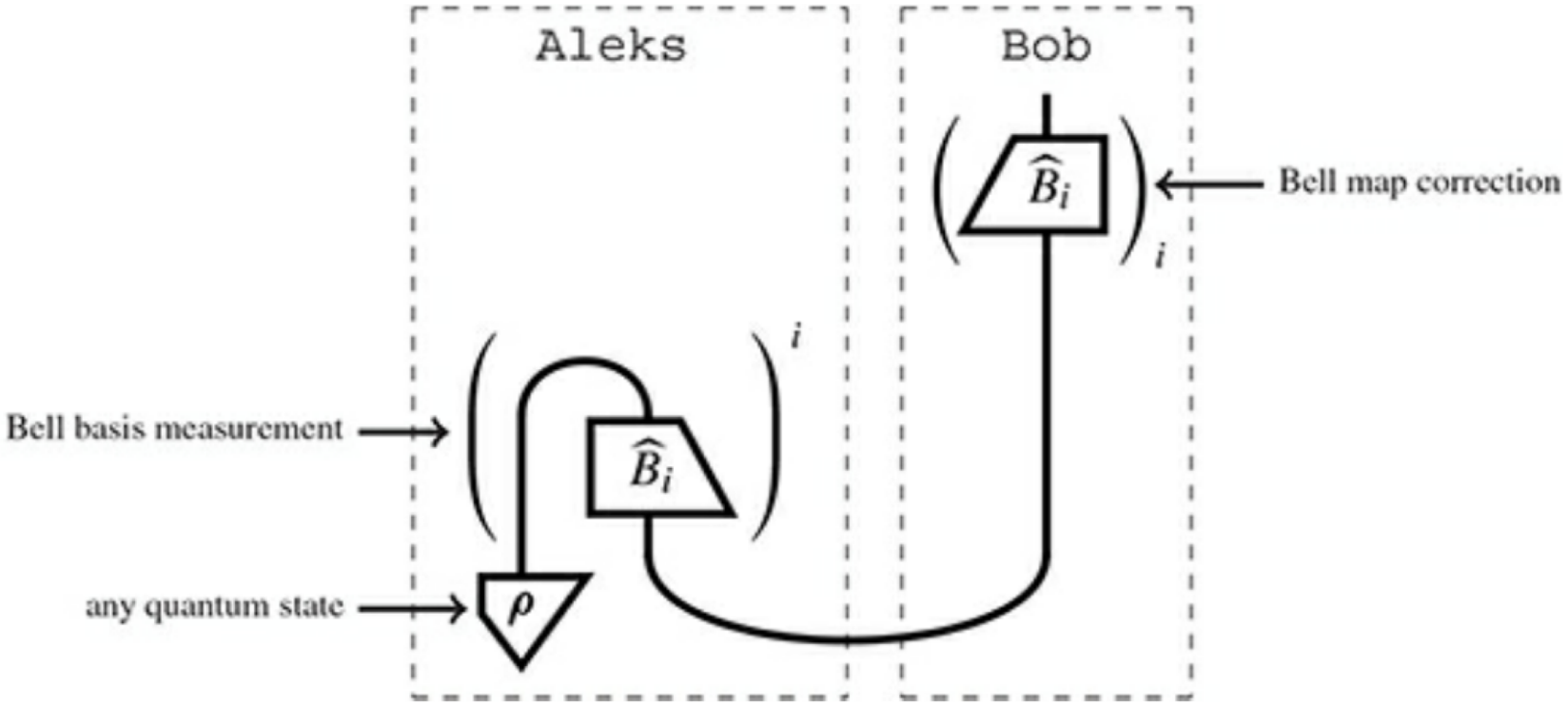


Aleksが通信しないとどうなるか？
エラー訂正なしのテレポーテーション

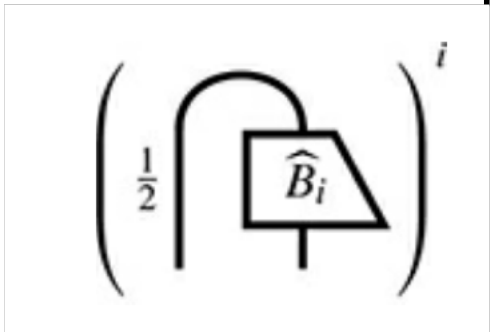
- 結果、この過程は非決定的な量子状態になる。しかしBobは、iにアクセスできない。この情報の欠如によって、Bobが受け取るのは、それぞれ可能な状態の混合状態になる。



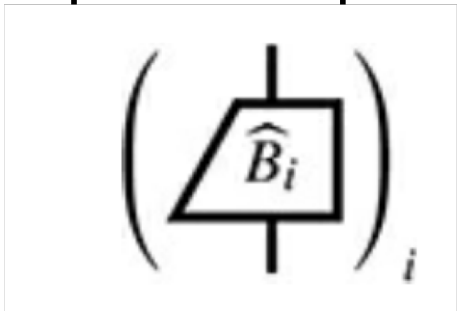
Aleksが通信した場合
エラー訂正付きのテレポーテーション

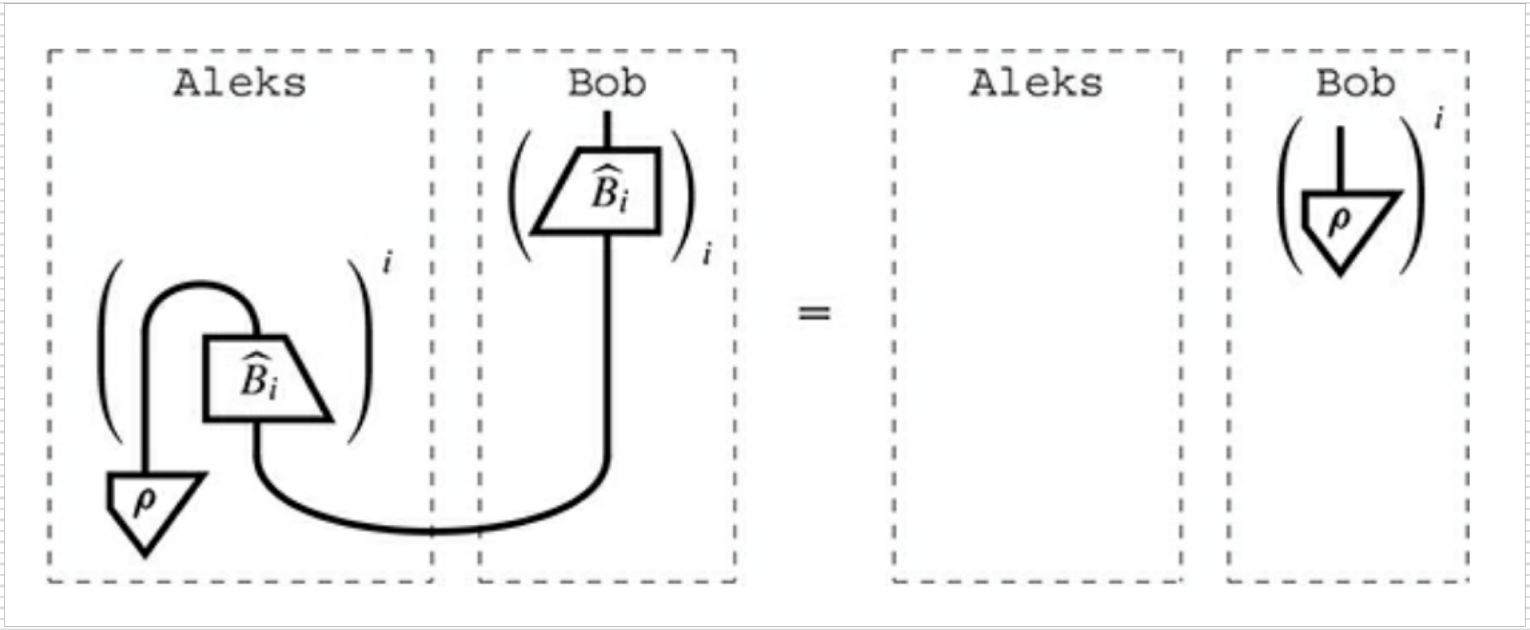


- 1.Aleks is in possession of an arbitrary quantum state ρ, which he wishes to send to Bob, and Aleks and Bob together share a Bell state.
- 2.Aleks performs a Bell basis measurement, that is, the following non-deterministic quantum process:



- 3.Aleks sends the outcome i to Bob.
- 4.Bob performs a Bell map correction, that is, the following controlled quantum process:

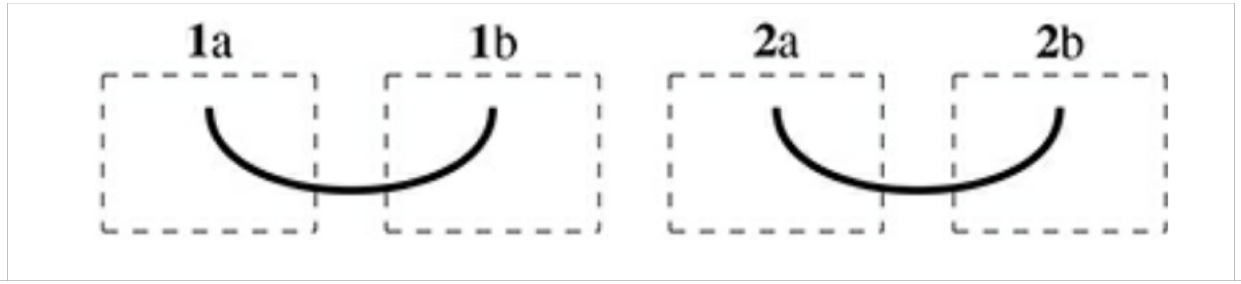


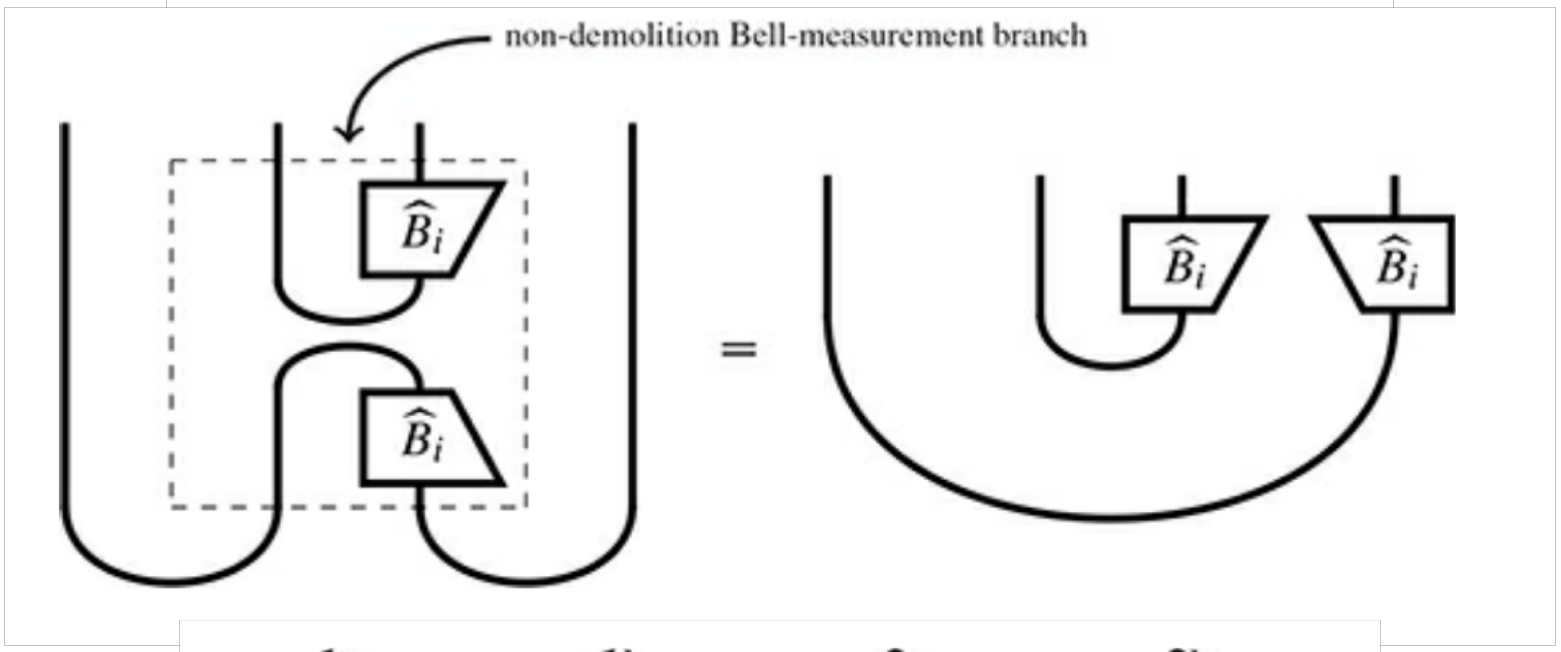

Aleks
Bob
$\widehat{B}_i$
ρ
i
=
Aleks
Bob
ρ
i

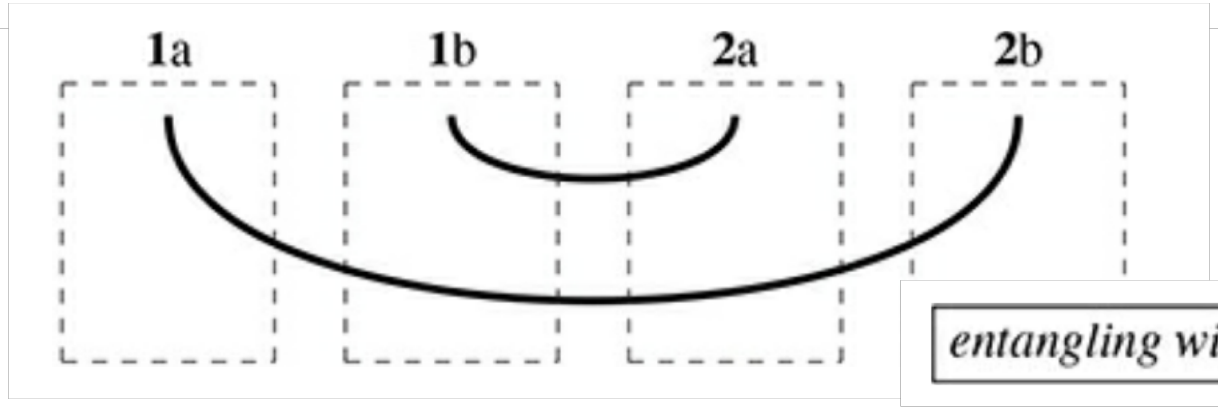
- we also emphasised that teleportation does not enable one to magically beam something through space, but rather enables one to to use one kind of data (classical) to send another kind of data (quantum). Since there are four elements in the Bell basis, Aleks has to send a number from 0 to 3 (i.e. two classical bits) to Bob. In exchange, Bob receives Aleks' qubit, which could be any one of infinitely many points in the Bloch ball.

Entanglement Swapping

Entanglement Swapping

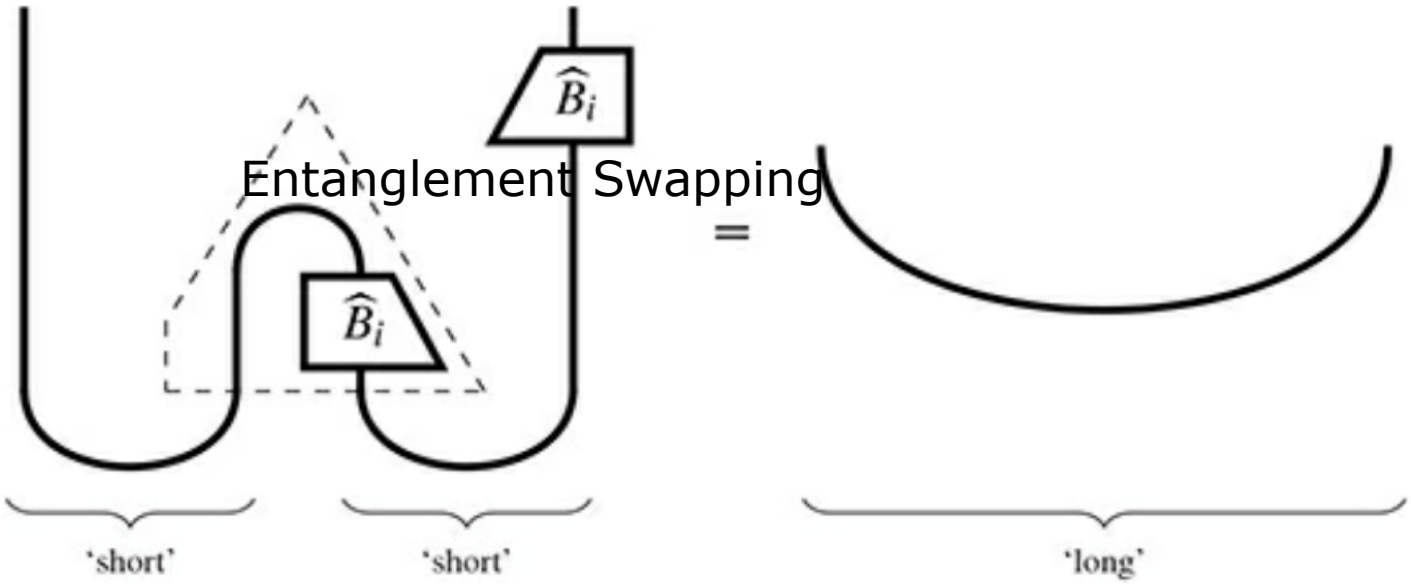




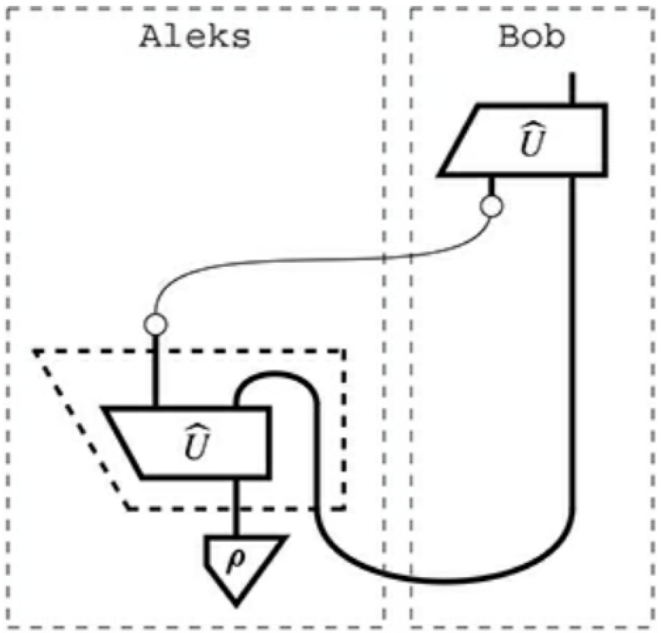


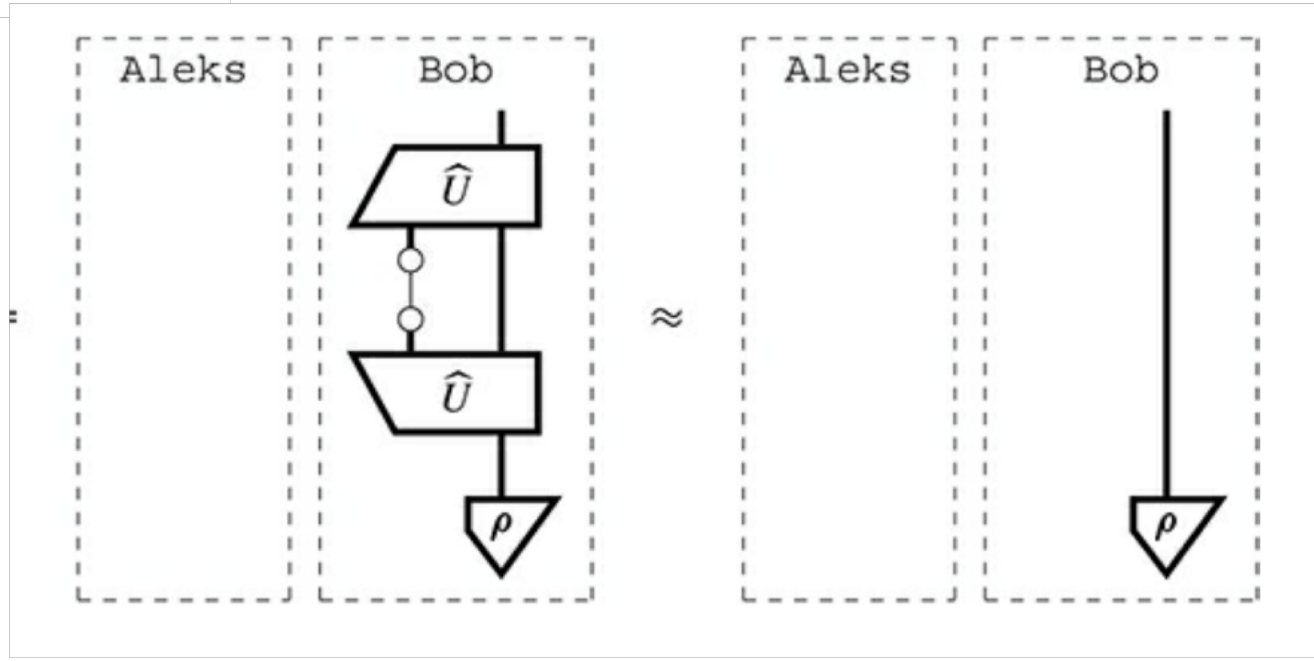
entangling without touching

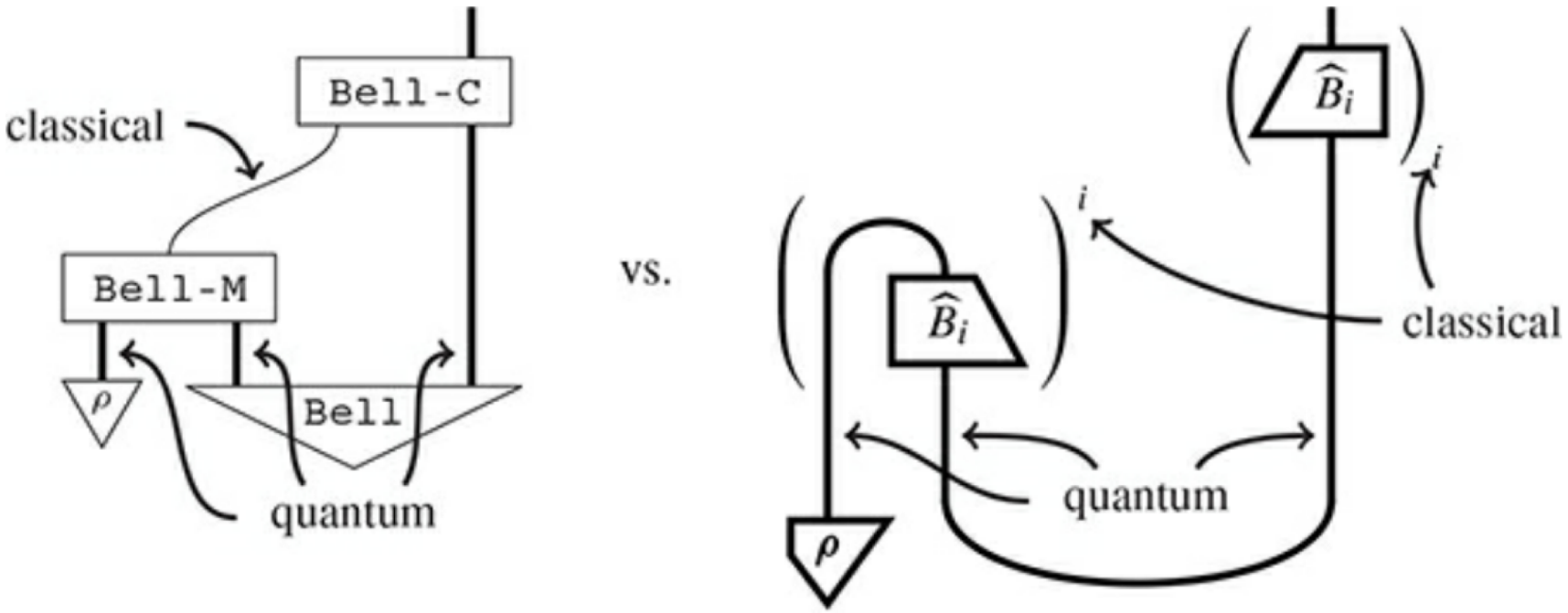
Entanglement Swapping

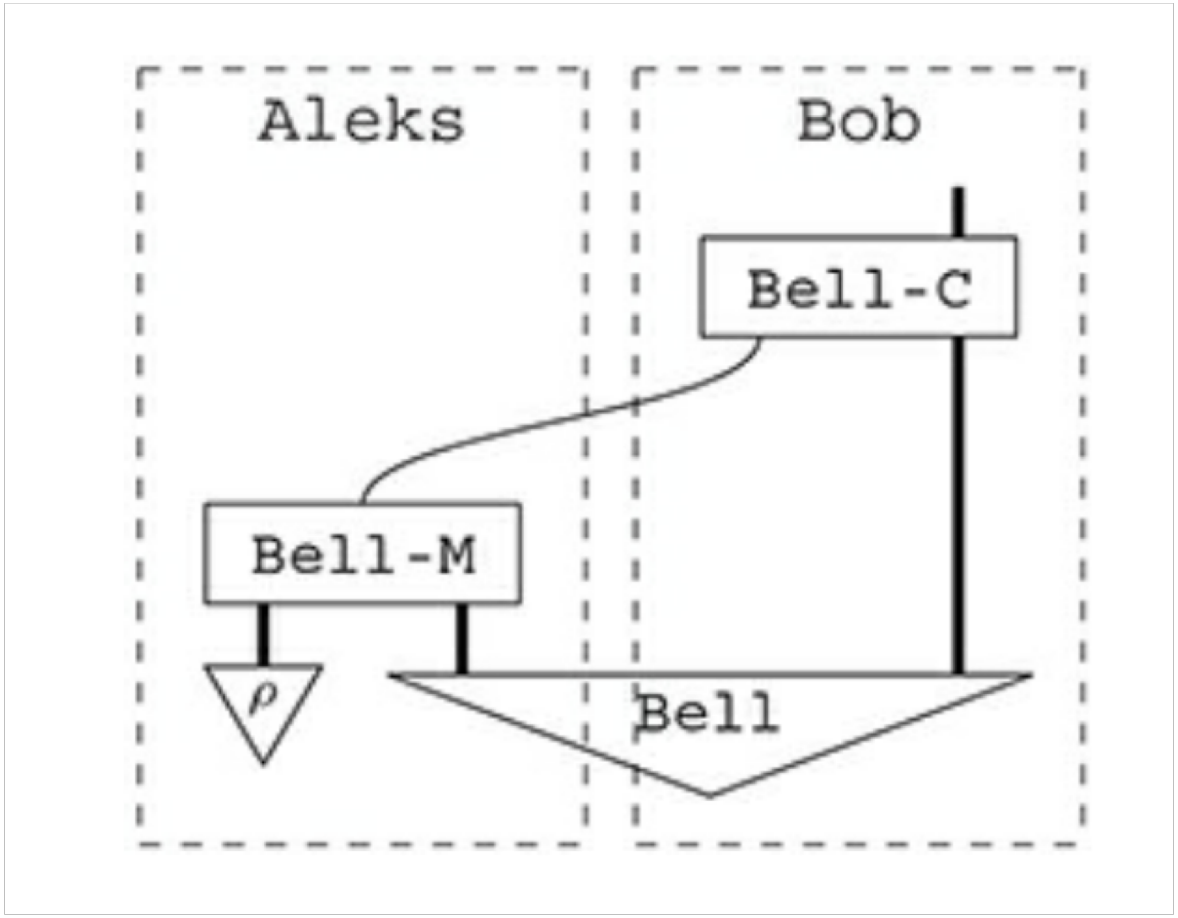


量子テレポーテーションの詳細

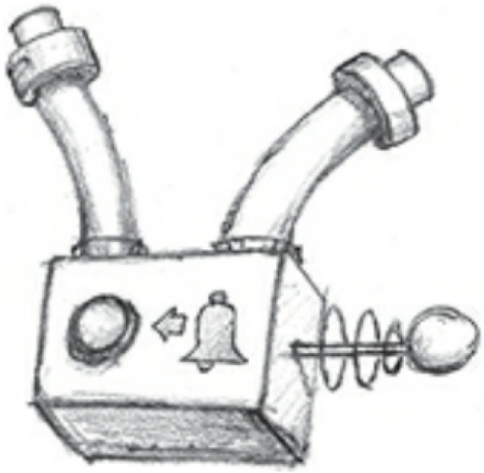

Aleks
Bob
$\hat{U}$
$\hat{U}$
ρ


Aleks
Bob
$\hat{U}$
$\hat{U}$
ρ
≈
Aleks
Bob
ρ

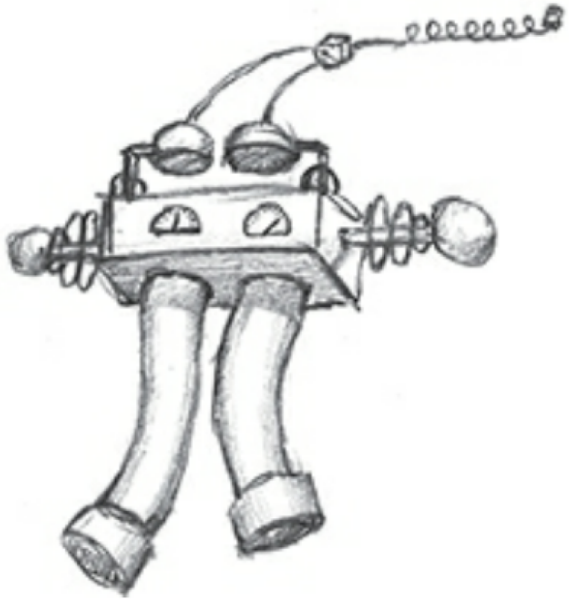

Bell-C
classical
Bell-M
ρ
Bell
quantum
vs.
$\widehat{B}_i$
i
$\widehat{B}_i$
i
classical
quantum
ρ


Aleks
Bob
Bell-C
Bell-M
ρ
Bell

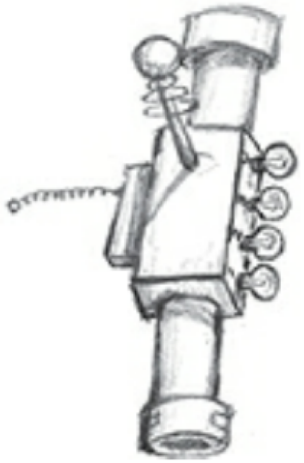
Bell

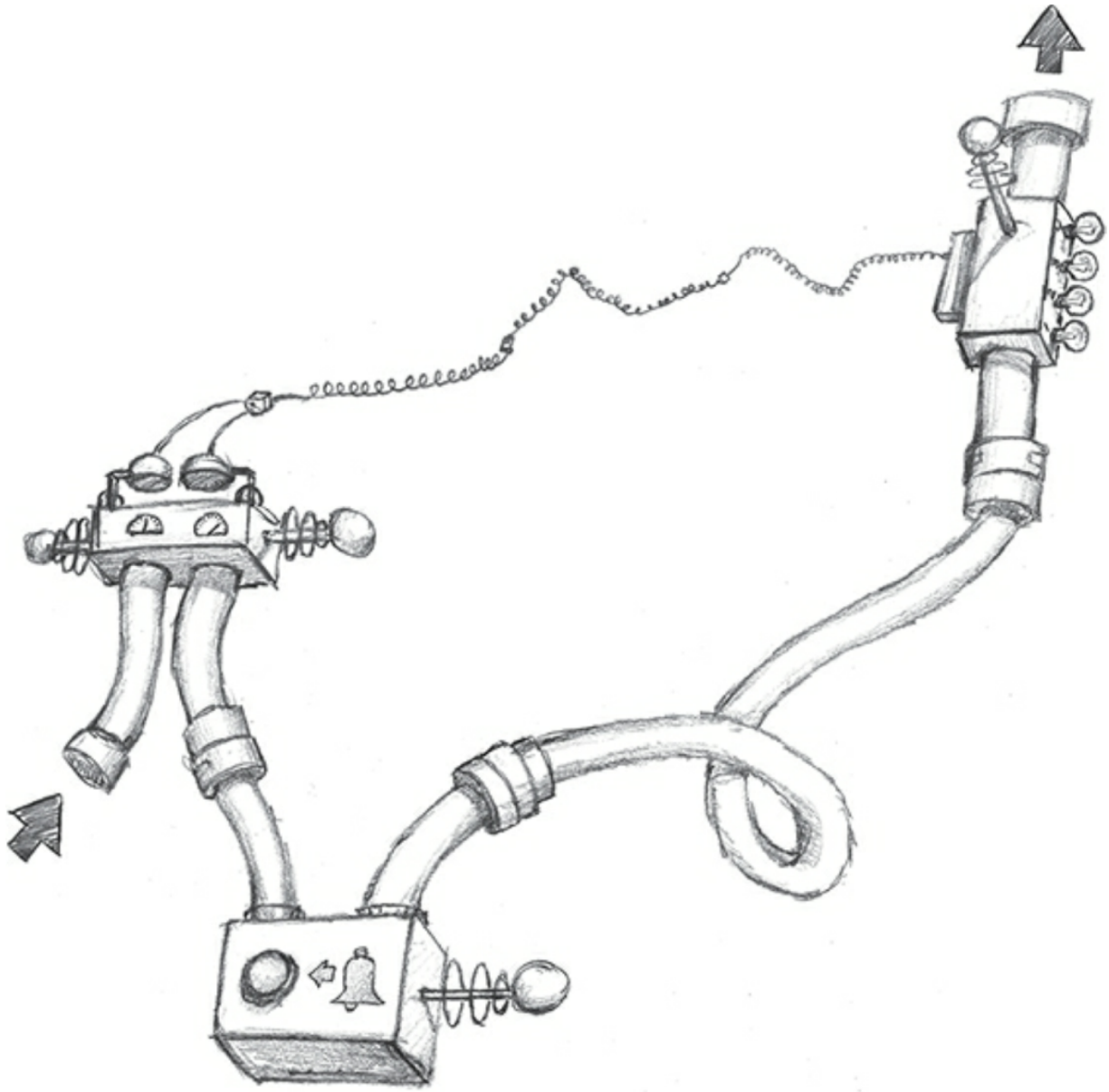


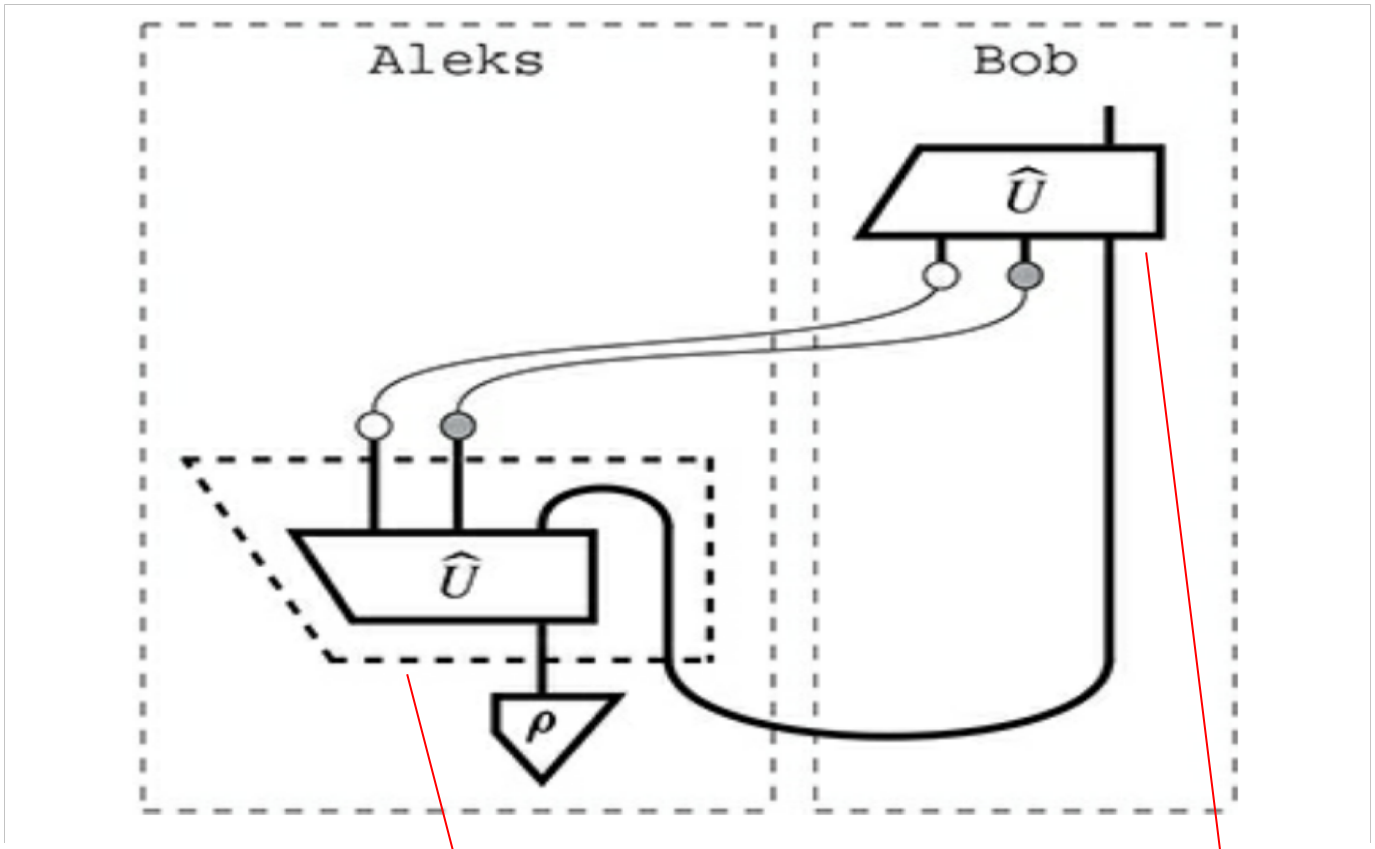
Bell-M

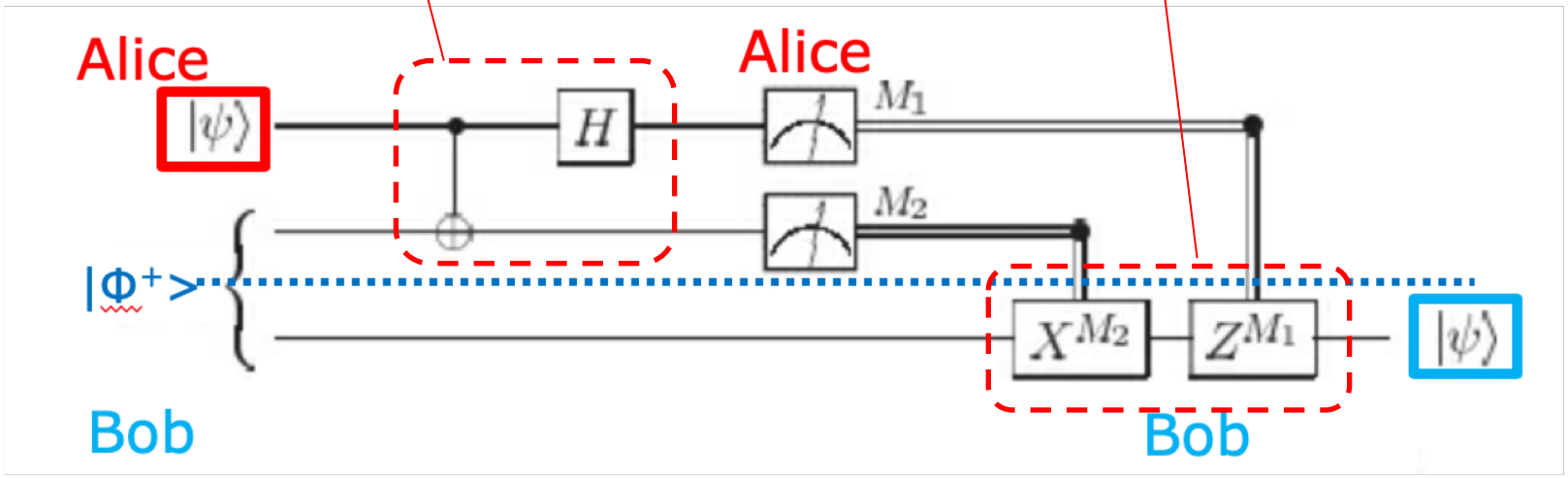


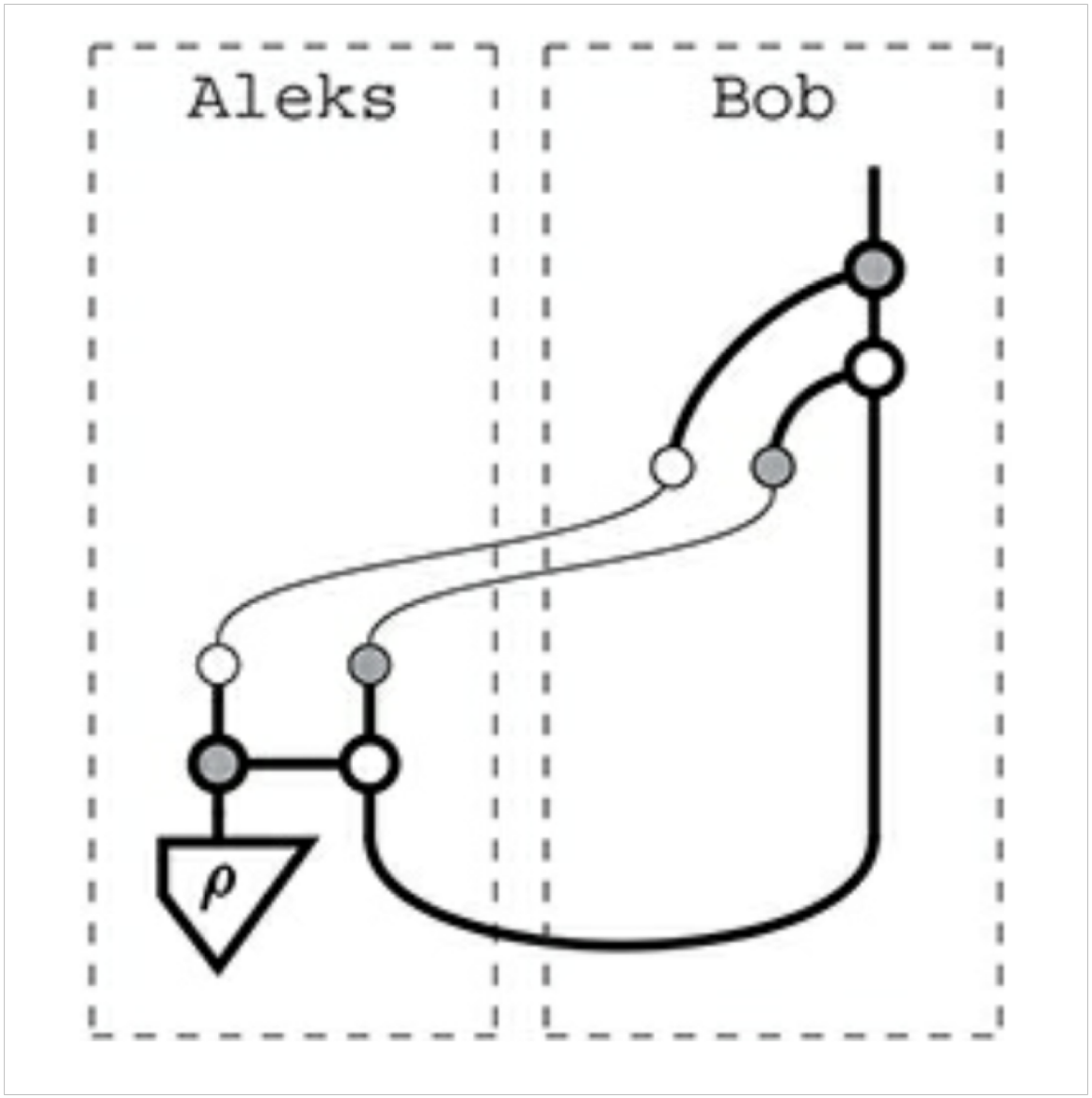
Bell-C

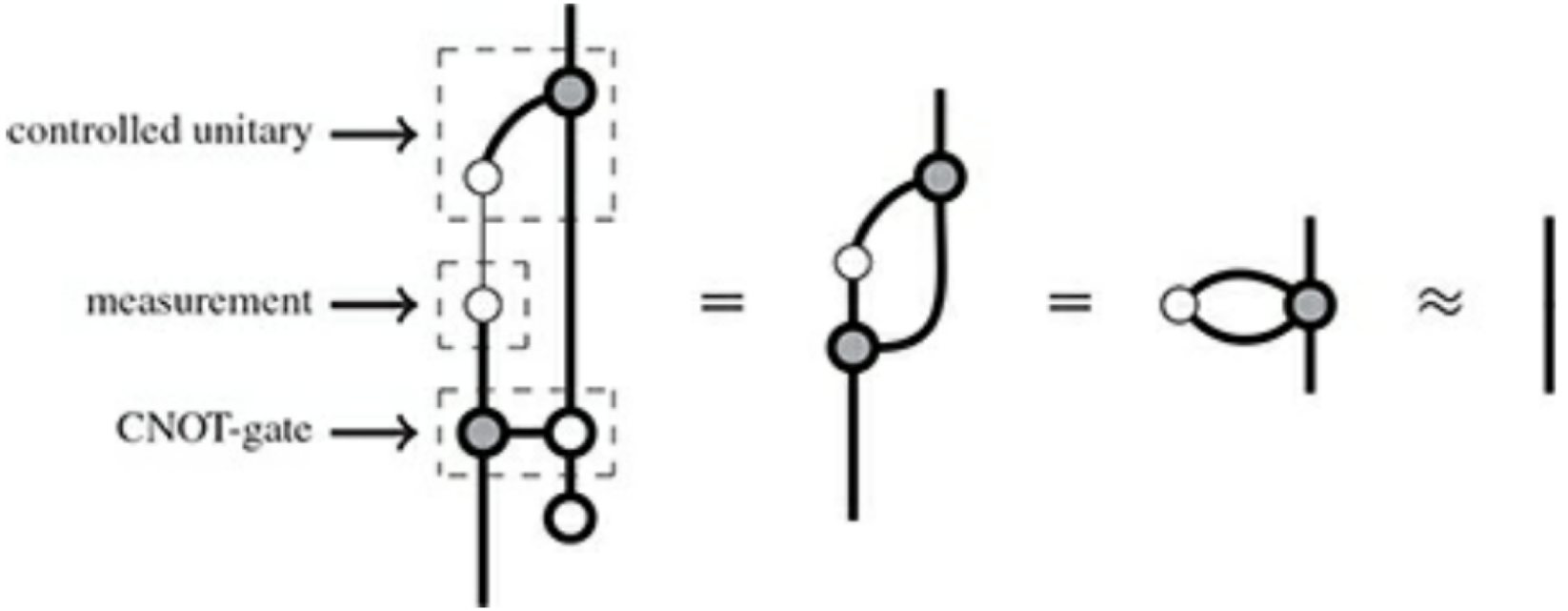


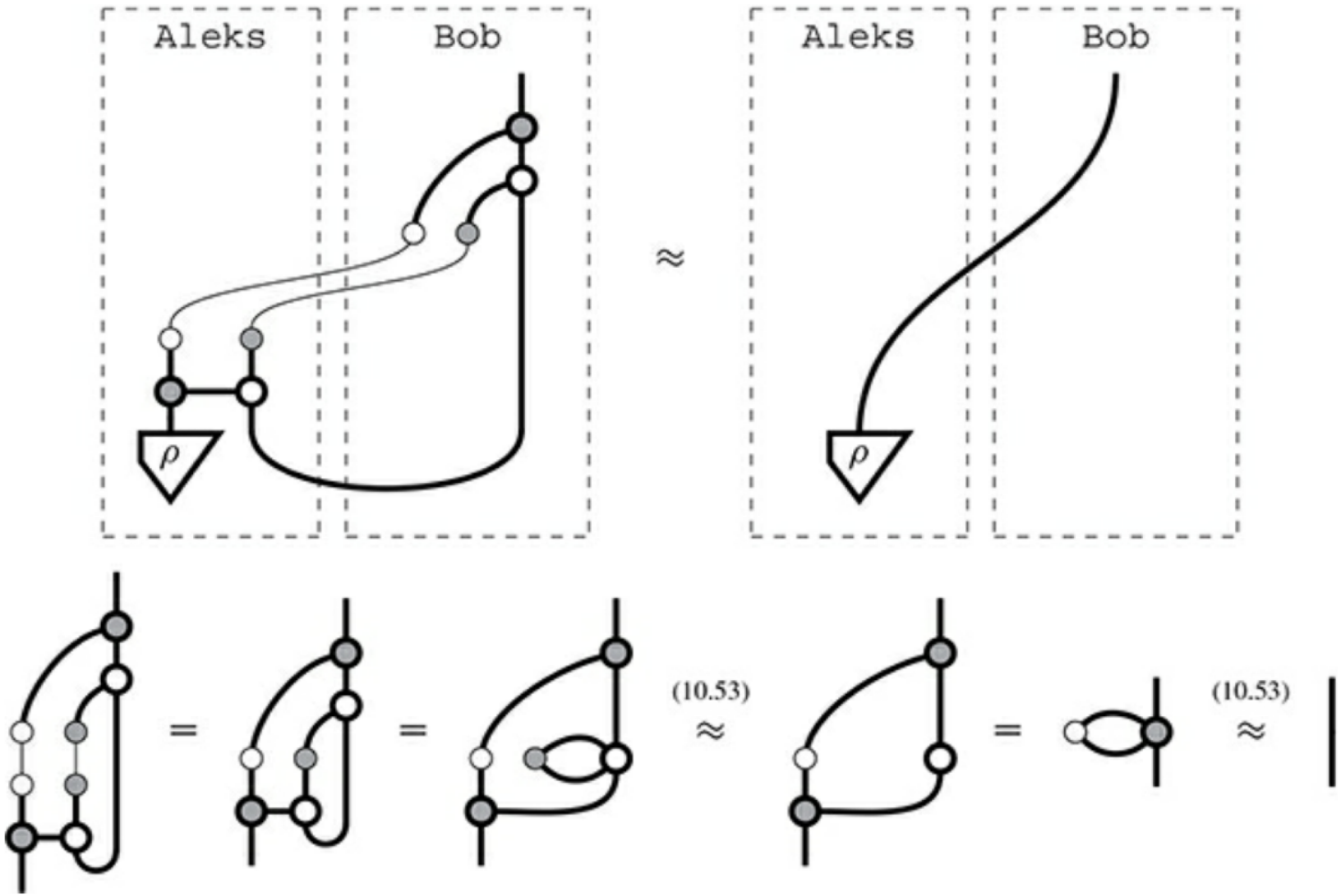



Aleks
Bob
$\widehat{U}$
$\widehat{U}$
ρ


Alice
Alice
$|\psi\rangle$
H
M_1
M_2
$|\Phi^+\rangle$
X^{M_2}
Z^{M_1}
$|\psi\rangle$
Bob
Bob


Aleks
Bob
ρ


controlled unitary
measurement
CNOT-gate


Aleks
Bob
ρ
≈
Aleks
Bob
ρ
=
=
(10.53)
≈
=
(10.53)
≈



これは、実は、量子テレポーションを
教えているところである